Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

1ª Frequência (1h30m) 08 – 04 – 2008

---

1. (a) Com base na definição de integral de Riemann, prove que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 2 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

é integrável em $[0, 2]$, e determine $\int_0^2 f(x)dx$.

(b) Determine a função derivada das seguintes funções:

$$F(x) = \int_x^b \frac{1}{1 + t^2 + \sin^2 t}\, dt; \quad G(x) = \int_a^b \frac{x}{1 + t^2 + \sin^2 t} dt.$$

(c) Enuncie a(s) propriedade(s) em que baseou a resposta à alínea (b).

2. (a) Determine o volume do sólido de revolução obtido por rotação, em torno do eixo OX, da região limitada por $y = 4x^2$ e $y = 2x$.

(b) Escreva uma expressão que lhe permita calcular a área da região

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1 \quad \wedge y \geq 2x - 3\right\}.$$

(c) Indique a natureza do integral impróprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^\alpha\, x}, \quad \alpha \geq 1.$$

3. Demonstre que, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é integrável em $[a, b]$.