Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

2^a Frequência (1h30m) 03 − 06 − 2008

---

1. (a) Indique, justificando, a natureza do integral impróprio
$$\int_0^1 \frac{\cos 3x}{\sqrt{x}}\,dx.$$
(b) Determine a natureza da série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3(3n)!}.$$
(c) Sejam $a_n \neq -1$, $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ absolutamente convergente. Indique, justificando, se $\sum \frac{1}{1+a_n}$ é ou não convergente.

2. (a) Determine o raio e o domínio de convergência das séries:
$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5x^n}{n3^n} \qquad\qquad (ii)\ \sum_{n=1} (-1)^n \frac{(x-25)^n}{n^n}$$
(b) Determine o desenvolvimento em série de potências de x da função $g(x) = \ln|3-x|$. Calcule $g^{(2008)}(0)$.

3. Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções contínuas num intervalo I, convergindo uniformemente para f em I. Mostre que f é contínua em I.

4. Considere a sucessão de funções $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definidas por
$$f_n(x) = \frac{\sin\ nx}{n^3}.$$
(a) Calcule , para cada x, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
(b) Verifique se a convergência é uniforme.
(c) Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\ nx}{n^3}$. Prove que
$$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$