Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

Exame - Época Normal (2h30m) 12/06/2008

(Este exame tem **7 perguntas** em **duas páginas**.)

1. (a) Seja f uma função não decrescente em $[a,b]$ e seja $P = \{t_0, ..., t_n\}$ uma partição de $[a,b]$ tal que $t_i - t_{i-1} = \delta$, $i = 1, ..., n$. Justifique as seguintes afirmações:

   (i) f é limitada em $[a,b]$;

   (ii) $S(f,P) - s(f,P) = \delta(f(b) - f(a))$;

   (iii) f é integrável em $[a,b]$.

   (b) Determine, justificando, todas as funções contínuas f que satisfazem a equação

$$(f(x))^2 = \int_0^x f(t)\frac{t}{1+t^2}\,dt.$$

2. Considere a região plana

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \ \text{ e } \ x \leq y \leq \frac{1}{2} + x^2\right\}.$$

   Determine:

   (i) a área de A;

   (ii) a expressão do volume do sólido gerado pela rotação de A em torno de Ox.

3. (a) Determine a natureza do integral impróprio

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\cos x}.$$

   (b) Calcule, caso exista, o Valor Principal de Cauchy do integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx.$$

4. (a) Determine o conjunto de todos os números positivos b para os quais a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n2^n}$$

   é convergente.

(b) Indique o domínio de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}(3x-1)^n.$$

5. Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções contínuas em $[0,1]$ que converge uniformemente para f . Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n = \int_0^1 f.$$

6. (a) Demonstre o "Critério de Weierstrass" : *Se para* $k = 1, 2, 3, ...$*existem constantes* a_k *tais que* $|f_k(x)| \leq a_k$ *para todo o* x *do conjunto* I, *e se* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *é convergente , então* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *é uniformemente convergente.*

   (b) Verifique se a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k^{\frac{5}{3}}}$ é uniformemente convergente para $x \in [0, \infty[$.

7. Determine o desenvolvimento em série de potências de x da função $f(x) = \cosh x$.