Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

Exame - Época Recurso (2h30m) 07/07/2008

(Este exame tem **7 perguntas** em **duas páginas**.)

1. (a) Calcule $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx$.

   (b) Demonstre o Teorema : *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua e seja* $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *tal que* $g([c,d]) \subset [a,b]$. *Então,*
$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f[g(t)]g\'(t)dt.$$

2. Seja f uma função contínua em $[a,b]$ tal que, para todo o x,
$$\int_0^x f(t)dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt.$$
   Determine $f(x)$ e enuncie o(s) teorema(s) em que baseou a sua resposta.

3. Determine

   (a) a área da região plana limitada pelas curvas
$$y = e^x, \qquad x^2 + y^2 = 1, \qquad y = -2 \quad e \quad x = 2$$

   (b) a expressão analítica que lhe permite calcular o comprimento do arco de ciclóide
$$f(x) = \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$
   entre os pontos correspondentes a $x = 0$ e $x = 2\pi a$, $a > 0$.

4. Determine k de modo que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k|x|} dx = 2.$$

5. (a) Prove que a série
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$$
   é convergente qualquer que seja $q > 0$, se $p > 1$.

(b) A extremidade de um pêndulo percorre um arco de $30cm$ de comprimento no seu primeiro movimento. Se em cada movimento sucessivo o comprimento do arco for $5/6$ do comprimento anterior, qual a distância percorrida pelo pêndulo até atingir o repouso ?

6. (a) Determine o raio R e o domínio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5x^n}{n3^n}$$

(b) Seja $\varrho \in (0, R)$. Mostre que a série dada é uniformemente convergente em $[-\varrho, \varrho]$.

(c) Determine o desenvolvimento em série de potências de x de uma primitiva da função

$$f(x) = \frac{3}{1+x^2}.$$

7. (a) Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções em I definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in]-\infty, n] \cap I \\ x-n & \text{se } x \in]n, +\infty[\cap I \end{cases}$$

Determine o limite pontual de $\{f_n\}$ e indique se esse limite é uniforme no caso $I = [a, b]$.

(b) Indique, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação :
A sucessão de funções $\{f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}\}$ *converge uniformemente em* $\mathbb{R}$ *para a função nula. Então a sucessão das derivadas* $\{f_n'(x)\}$ *é convergente.*