Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

Frequência (1h30m) 21 – 05 – 2009

---

1. (a) Determine a soma superior $S(f;P)$ e a soma inferior $s(f;P)$ para a função f definida por $f(x)=\frac{1}{x},\ x\in[1,3]$, relativamente à partição $P=\{\frac{5}{4},2,\frac{5}{2},\frac{11}{4}\}$.

   (b) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monótona decrescente e sejam $S(f;P)$ e $s(f;P)$ as somas relativas à partição $P=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ de $[a,b]$:

      i. se $t_i-t_{i-1}=\delta$ para cada i, determine $S(f;P)-s(f;P)$;

      ii. demonstre que f é integrável em $[a,b]$.

2. Determine

   (a) a área da região plana limitada por $y=4x^2$ e $y=2x$;

   (b) o comprimento do arco de curva $y=\ln(\cos x)$, $\quad \frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$;

   (c) o volume do sólido de revolução obtido por rotação, em torno do eixo OX, da região plana limitada por $y=e^x,\ y=0,\ x\le 0$.

3. (a) Determine a função derivada da seguinte função:

$$F(x)=\sin\Big(\int_0^x \sin\Big(\int_0^y \sin^3 t\,dt\Big)dy\Big).$$

   (b) Enuncie correctamente o Teorema Fundamental do Cálculo Integral.

   (c) Dê um exemplo de uma função f para a qual existe $x_0\in]a,b[$ tal que $F'(x_0)\neq f(x_0)$.

4. (a) Calcule : $\int_{-2}^{0}\frac{1}{(1+x)\sqrt{|x|}}\,dx$.

   (b) Demonstre o Critério de Comparação: *Seja $f:[a,+\infty]\to\mathbb{R}$ integrável em $[a,X]$, para todo o $X>a$. Se o integral impróprio $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ for absolutamente convergente, então é convergente.*