Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

Exame: época normal 22-06-09

---

1. (a) Sem calcular o valor do integral, prove que

$$\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx \quad \leq \frac{1}{10}.$$

   (b) Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e seja G a função definida por

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

   Demonstre que G é contínua $[a,b]$.

   (c) Calcule o valor do integral definido

2. Calcule o valor do integral

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}}.$$

   (**sugestão**: utilizar a mudança de variável $x^2=\cos\theta$).)

3. (a) Determine o volume do sólido de revolução obtido quando a região, limitada por $y=x^2$ e $y=x^3$, gira em torno da recta $y=0$.

   (b) Seja f uma função, não negativa, contínua em $[a,b]$. Usando a definição de integral de Riemann, prove que a área da superfície plana limitada pelas curvas $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, e $y=0$ é dada por $\int_a^b f(x)\,dx$.

4. (a) Determine a natureza do integral impróprio

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

   Enuncie uma propriedade que justifique a sua resolução.

   (b) Prove a igualdade.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^x}\,dx=1.$$

5. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções num intervalo I, definida por

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad x\leq n \\ x^2-n & \text{se} \quad x>n. \end{cases}$$

   Diga, justificando, se (f_n) converge uniformemente para alguma função f, nos seguintes casos:

   (i) $I=[20,1200]$.

   (i) $I=\mathbb{R}$.

v.s.f.f.

6. Considere a função f definida por $f(x) = \frac{1}{1+2x^2}$.

   (a) Determine o seu desenvolvimento em série de potências de x, bem como os pontos onde a série é convergente.

   (b) Indique, justificando, o desenvolvimento em série de potências de x de uma primitiva de f.

7. (a) Seja f uma função real, de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{se} \quad x \in]-\infty, 1[\\ \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

      i. Mostre que f satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio de Lagrange em $[0, 2]$.

      ii. Determine todos os valores de c tais que

$$f(2) - f(0) = 2f^{'}(c).$$

   (b) Seja f uma função real, de variável real, diferenciável, e sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. Mostre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+bh) - f(x-ah)}{(b+a)h} = f^{'}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$