Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

Exame: época de recurso 08 – 07 – 2009

---

1. Calcule, justificando convenientemente,

   (a) $f(0)$, sabendo que

   $$f(\pi) = 2 \quad \text{e} \quad \int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin x \, dx = 5;$$

   (b) $f(1)$, sabendo que f é contínua e tal que

   $$\int_0^{x^2} f(t)\, dt = x^2(x+1).$$

2. (a) Calcule a área da região plana $\mathcal{R}$ limitada pelas curvas de equações $y = x^2 - 2$ e $y = 2$.

   (b) Escreva uma expressão que lhe permita calcular o volume do sólido obtido por rotação de $\mathcal{R}$ em torno de OY.

3. Determine a natureza do integral

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx}\, dx, \quad k > 0.$$

4. (a) Considere a sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ é definida por

   $$f_n(x) = x^n(1 - x^n).$$

   - Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função nula.
   - Verifique se a convergência é uniforme.

   (b) Demonstre que *se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, é uma sucessão uniformemente convergente para a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, então f é integrável em $[a,b]$ e*

   $$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

5. (a) Seja f a função definida por $f(x) = \ln|1 - x^2|$.
   Determine o seu desenvolvimento em série de potências de x.

   (b) Verifique se a seguinte série é uniformemente convergente em $[0,a],\ a > 0$:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x}.$$

   Justifique a resposta.

   (c) Prove a veracidade da seguinte afirmação: *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e seja $\rho \in]0, r[$. Então a série converge uniformemente em $[-\rho, \rho]$.*

6. (a) Mostre que a função f, definida por $f(x) = x^3 - 3x + k$, tem, **quando muito**, um zero no intervalo $[-1, 1]$.

   (b) Seja f a função definida por $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$.

      i. Indique o domínio, as assímptotas e os extremos de f.

      ii. Escreva a fórmula de Taylor da função f, em torno de $x = 1$, com resto de Lagrange de ordem 2.