Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

1^a Frequência 08 – 04 – 2010

---

1. (a) Com base na definição, verifique se a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

é integrável em $[-1, 3]$.

(b) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável. Mostre que se $|f(x)| \leq k$, $\forall x \in [a, b]$, então

$$\Big| \int_a^b f(x) dx \Big| \leq k(b - a).$$

(c) Demonstre que *uma função contínua* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é integrável em* $[a, b]$.

2. Calcule:

(a) $\int \frac{x^4}{x^4-1}\, dx$;

(b) $\int_{-1}^{2} (x^2 + 1)e^x\, dx$;

(c) a derivada da função

$$F(x) = \int_{\cos x}^{x} \cos(t^2)\, dt;$$

(d) a área da região plana limitada pelas curvas $x^2 + y^2 = 4$, $\quad y = 2 - x$, $\quad y = -x$;

(e) o comprimento do arco de curva

$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t, \end{cases} \qquad t \in [0, \pi];$$

(f) a natureza do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 + e^{-x}}{x}\, dx.$$

3. Chama-se *logaritmo natural* à função $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Prove que se tem:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y.$$