Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

2^a Frequência 01 – 06 – 2010

---

1. Seja $a_n = \frac{2n}{3n+1}$.
   (a) Verifique se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Justifique.
   (b) Verifique se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. Justifique.

2. (a) Demonstre que, se a sucessão $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais é convergente, então $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy.
   (b) Demonstre que, se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ é divergente .

3. Indique a natureza das seguintes séries numéricas:

   (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^{2n}}{(2n-1)!}$; (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{3n}}{3^n}$.

4. (a) Prove que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi a)}{x^2+n^2}$ é absolutamente convergente, quaisquer que sejam $x, a \in \mathbb{R}$.
   (b) Enuncie e demonstre o *Critério de Weierstrass.*

5. Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^n+1} .$$

6. Considere a sucessão de funções $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde,

$$f_n(x) = x + \frac{x}{n}, \quad x \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Determine o limite pontual de $\{f_n\}$.
   (b) Verifique se ocorre convergência uniforme no intervalo indicado.