Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

Exame - Época normal $14-06-2010$

1^a **PARTE**: 1h 30m

---

1. Considere a função f definida por $f(x) = \ln x - 1, \quad 1 \leq x \leq 4.$
   (a) Determine a soma de Riemann relativa a uma partição $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_6\}$ do domínio, com $\theta_i = t_i$.
   (b) Calcule $\int_1^4 f(x)\, dx$.
   (c) Compare os resultados das alíneas anteriores e interprete geometricamente.

2. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Demonstre que f é integrável em $[a, b]$ se e só se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P, \quad U(f; P) - L(f; P) < \epsilon,$$

   onde $U(f; P)$ e $L(f; P)$ designam, respectivamente, as somas superior e inferior de Darboux.

3. Considere a função $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{1}{(1+t^2)t}\, dt.$$

   (a) Calcule $\phi(2)$.
   (b) Mostre (justificando convenientemente) que ϕ é diferenciável e calcule $\phi'(x)$.

4. Num referencial cartesiano, esboce a região plana $\boldsymbol{S}$ limitada pelas curvas de equações

$$x = y^2 \quad e \quad x = 8 - y^2.$$

   Escreva, na forma de integral, a expressão que lhe permite calcular:
   (a) a área da região $\boldsymbol{S}$;
   (b) o volume do sólido de revolução gerado pela rotação de $\boldsymbol{S}$ em torno do eixo OY.

5. (a) Diga o que entende por "integral impróprio divergente".
   (b) i. Determine a natureza do integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2 + x + 1}\, dx.$$

   ii. Enuncie e demonstre o Critério de Convergência em que baseou a sua resolução.

2^a **PARTE**: 1h 30m

---

1. Indique, justificando o valor lógico das proposições seguintes:

   (a) Se o conjunto dos termos de uma sucessão não tem máximo nem mínimo, a sucessão é divergente.

   (b) Se $\sum(a_n + b_n)$ é convergente então $\lim a_n = 0$ e $\lim b_n = 0$.

   (c) Se $\lim a_{2n} = \infty$ e $\lim a_{2n+1} = \infty$ então $\lim a_n = \infty$.

   (d) Se $\sum\limits_{n\geq k}^{+\infty} a_n, \quad k > 500^{10}$, é divergente então $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ pode ser convergente ou divergente.

2. (a) Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as seguintes séries:

   $$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}, \qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!} \quad , k \geq 2.$$

   (b) Demonstre que se a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente, então é simplesmente convergente.

3. (a) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função f definida por $f(x) = \ln|2x+1|$.

   (b) A função J_1 definida por

   $$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

   é chamada *função de Bessel de ordem 1.*

   Determine o seu domínio.

4. Considere a sucessão de funções de termo geral

   $$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Mostre que $f_n(x)$ converge pontualmente para $f(x) = 0$.

   (b) Verifique se a convergência é uniforme .