Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

Exame - Época Recurso 29 – 06 – 2010

---

1. Considere a função f definida por $f(x) = \frac{x^3}{a^4+x^4} \quad 0 \leq x \leq 2$.
   (a) Determine as somas Superior e Inferior de f relativamente a uma partição $P = \{t_0, t_1, t_2\}$ do domínio.
   (b) Calcule $\int_0^2 \frac{x^3}{a^4+x^4}\, dx, \qquad (a \neq 0)$.
   (c) Compare e comente os resultados das alíneas anteriores.

2. (a) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada contínua, excepto no ponto $c \in]a,b[$. Mostre que f é integrável em $[a,b]$.
   (b) Seja f uma função real, de variável real, contínua, e seja $x \geq 0$. Calcule $f(1)$, sabendo que

$$\int_0^{x^2} f(t)\, dt = x^2(x+1).$$

3. Num referencial cartesiano, esboce a região plana $\boldsymbol{S}$ limitada pelas curvas de equações

$$-x^2 = y - 4, \qquad y = -3x.$$

   Escreva, na forma de integral, a expressão que lhe permite calcular:
   (a) a área da região **S**;
   (b) o comprimento do arco da parábola $-x^2 = y - 4$, compreendido entre os pontos de abcissas -1 e 4.

4. (a) Diga o que entende por "integral impróprio convergente".
   (b) Considere o integral

$$\int_{-1}^{7} \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}\, dx.$$

   i. Determine a sua natureza aplicando um Critério de Convergência (enuncie-o correctamente).
   ii. Calcule o seu valor.

5. (a) Indique se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as seguintes séries:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}, \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}, \qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}.$$

   (b) Demonstre que se a série $\sum a_n$ é convergente, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

6. (a) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função f definida por $f(x) = \int e^x\, dx$.
   (b) Determine o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}.$$

7. (a) Defina "sucessão de funções uniformemente convergente".
   (b) Verifique se a sucessão

$$f_n(x) = xe^{-nx}, \quad x \in [0, \infty[, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   converge pontualmente para $f(x) = 0$.