Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

Exame: Época normal 13-06-11

1^a PARTE:1h 30m

---

1. (a) Seja f uma função diferenciável, definida implicitamente pela equação $x^3 + y^3 = 6xy$. Determine $f^{'}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Calcule o valor do integral definido $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\, dx$.
   (c) Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Demonstre que f é integrável em $[a, b]$.
   (d) Se f for contínua e $\int_0^9 f(x)\, dx = 4$, determine $\int_0^3 xf(x^2)\, dx$.

2. Considere a região plana $\mathcal{R}$ limitada pelas curvas definidas por

$$y = 3\sin(x^2), \quad y = e^{x/2} + e^{-2x}, \quad x = \pi, \quad x = 0$$

. Escreva, na forma de integral, a expressão que lhe permite calcular

   (a) o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de $\mathcal{R}$, em torno do eixo dos $x^{'}s$;
   (b) A área de $\mathcal{R}$.
   (c) Determine a natureza do integral impróprio

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{x^3}\, dx.$$

3. Considere a função f definida por $f(x) = \frac{1}{1+2x^2}$.

   (a) Determine o seu desenvolvimento em série de potências de x, bem como os pontos onde a série é convergente.
   (b) Calcule $f^{(20)}(0)$.
   (c) Indique, se possível, o desenvolvimento em série de potências de x de uma primitiva de f.

4. Determine, caso exista, a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{2x}{3}.$$

5. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções num intervalo I, definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{se} \quad x \leq \sqrt{n} \\ x^2 - n \text{se} \quad x \geq \sqrt{n}. \end{cases}$$

Diga, justificando, se (f_n) converge uniformemente para alguma função f, nos seguintes casos:

   (i) $I = [20, 1200]$.
   (i) $I = \mathbb{R}$.

em