Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

# ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

**Frequência** (2h) 26 – 04 – 2011

---

1. Calcule :
   (i) $\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$ (ii) $\int x\sin x\cos x\,dx$ (iii) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

2. (a) Com base na definição de integral de Riemann, prove que se $f$ é uma função contínua em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right).$$

   (b) Demonstre que se $f$ e $g$ são funções integráveis em $[0,+\infty[$, então $f+g$ é integrável em $[0,+\infty[$.

3. Indique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações e justifique a sua resposta (apresente os cálculos efectuados e enuncie as propriedades em que se baseou).

   (a) Se $F(x)=\int_{\cos x}^{0}\sqrt{1+t^4}\,dt$, então $F'(x)=\sqrt{1+\cos^4 x}$.

   (b) O integral impróprio $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ é divergente.

   (c) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \pi$.

   (d) O volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo $OX$, da região plana limitada pelas curvas $x=e,\ x=2e$ e $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, é igual a $\pi\ln 2$.

   (e) Para calcular o comprimento da curva

$$\begin{cases} x = \frac{\cos t}{4}(2-\cos(2t)) \\ y = \frac{\sin t}{4}(2+\cos(2t)) \end{cases},$$

   é suficiente calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{4}\sqrt{\cos^2(2t)}\,dt.$$

4. Estude, quanto à continuidade uniforme, a função

$$f(x)=\sqrt{x},\quad x\in]0,b[,\qquad 0<b\leq+\infty.$$