DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Exame especial de Análise Infinitesimal IV

Duração: $2h30m$ 16/10/2001

Sem consulta.

Não é permitido o uso de calculadora.

1. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 (em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$ respectivamente) tais que

$$\phi(2) = 0, \ \phi'(2) = 4, \ f(1,0) \neq 0.$$

   (a) Mostre que a equação $f(e^x, \sin x) y \phi(yz) = 0$ define implicitamente z como função de x e y numa vizinhança de $(0,1,2)$.

   (b) Sendo $z(x,y)$ a função cuja existência foi provada na alínea anterior, determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,1)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,1)$.

2. Sejam $P, Q : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1, onde U é um aberto e γ um arco de curva orientada rectificável contido em U.

   (a) Defina $\displaystyle\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

   (b) Deduza uma fórmula de cálculo para o integral curvilíneo da alínea anterior em função de um integral simples.

3. Calcule $\displaystyle\oint_\gamma 2ye^{-x^2}\,dx + x^2y\,dy$ onde γ é a fronteira da região

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \text{ e } y \leq x \leq 1\},$$

   orientada no sentido directo.

4. Seja $\vec{F}(x,y,z) = (yz, 0, 0)$ e seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y + 4 \text{ e } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

   Calcule $\displaystyle\iint_S (\mathrm{rot}\vec{F}|n)\,dS$, onde n é normal a S, unitário e aponta para baixo, ou seja, $n = \dfrac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}}$.

V.S.F.F.→

5. Considere a região do espaço

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2} \text{ e } 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}.$$

(a) Calcule o volume de V.

(b) Calcule $\iint_{FrV} (\vec{F}|n)\, dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (3x + x^2y, xy^2 - 2yz, -4xyz + z^2)$ e n é a normal unitária exterior a FrV.

6. Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^2, em que A é um conjunto compacto, simplesmente conexo e com fronteira de classe C^1.

(a) Seja $\vec{F} = f\, Dg$. Aplicando o Teorema de Gauss a esta função deduza que

$$\iiint_A [f\Delta g + (Df|Dg)]\, dxdydz = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n}\, dS,$$

em que $\Delta f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, $S = FrA$ e n representa a normal unitária exterior a FrA.

(b) Considere, na fórmula estabelecida em (a), $f = g$.

Prove que se $\Delta f = 0$ em A e se f se anula na fronteira de A, então f é identicamente nula em A.