Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Análise Infinitesimal IV

Duração: 2h 30mn | 26 de Junho de 2001

1. Verifique que a equação

$$\phi\left(x^2y+e^y\right)=0$$

define implicitamente y como função de x numa vizinhança de $(0,0)$, onde $\phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 que verifica $\phi(1)=0$ e $\phi'(1)=e$.

2. (a) Seja $T:V\subset\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em que V é um conjunto compacto, mensurável e simplesmente conexo, tal que a fronteira de V, S, admite plano tangente em todos os pontos. Prove que

$$\iiint_V \frac{\partial T}{\partial x}\,dx\,dy\,dz=\iint_S T\,n_1\,dS\,,$$

em que $\widehat{n}=(n_1,n_2,n_3)$ representa a normal exterior unitária.

Nota: Não admita como resultado conhecido o Teorema de Gauss.

(b) Calcule, utilizando integrais triplos, o volume da seguinte região:

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:-1\leqslant z\leqslant 1,\ x^2+y^2-z^2\geqslant 1,\ x^2+y^2\leqslant 2\right\}.$$

(c) Calcule $\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\widehat{n}\,dS$, sendo

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:-1\leqslant z\leqslant 1,\ x^2+y^2-z^2=1\right\},$$

$\overrightarrow{F}=\left(-x^3,3yx^2,4z\right)$ e $\widehat{n}$ a normal unitária interior de S.

Sugestão: Utilize a alínea b) e o facto do volume da porção do cilindro $x^2+y^2\leqslant 2$, com $-1\leqslant z\leqslant 1$, ser igual a 4π.

3. Seja V um compacto mensurável, simplesmente conexo e tal que $Fr\ V$ é de classe C^1. Estabeleça fórmulas que permitam relacionar a medida de V com um integral em $Fr\ V$, no caso de $V\subset\mathbb{R}^n$, $n=2,3$.

4. Calcule

$$\int_C -\frac{y^2}{2}\,dx + xy\,dy\ ,$$

onde C é a fronteira da região

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant \frac{x^2}{2} \text{ e } x+y \leqslant 4\right\}\ ,$$

orientada no sentido positivo.

5. (a) Seja $R : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, sendo

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ z = \varphi(x,y)\}\ ,$$

em que D representa um compacto mensurável, simplesmente conexo, de fronteira seccionalmente C^1 e φ representa uma função de classe C^1.

Prove que

$$\oint_\gamma R(x,y,z)\ dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\,n_1 - \frac{\partial R}{\partial x}\,n_2\right)\ dS\ ,$$

em que $\gamma = \varphi(Fr\ D)$ está orientada no sentido directo, e $\widehat{n} = (n_1, n_2, n_3)$ representa a normal superior unitária.

Nota: Não admita como resultado conhecido o Teorema de Stokes.

(b) Sejam S a superfície de equação

$$z = x^2 + y^2\ ,$$

orientada com a normal unitária dirigida para baixo e

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ e } (x,y) \in Fr\,([\overset{-2}{\cancel{0}},2] \times [\overset{-2}{\cancel{0}},2])\}\,.$$

Determine $\oint_C -x\ dx - xz\ dy + z^2 dz$, com C orientada positivamente.

$\frac{2}{3}\left[(\ell^2-1)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$ $\left[\ell\sqrt{\ell^2-1}\ \ 2\pi\ \right]_0^{12}$

$16\pi/3$ $\quad -16\pi + \frac{16\pi}{3} = 16\pi$