

Exame de Recurso de Análise Infinitesimal IV

Duração: 2h 30mn

23 de Julho de 2001

1. Seja  $(x_0, y_0, z_0)$  uma solução do sistema definido por

$$\begin{cases} z^2 + xy - a = 0 \\ z^2 + x^2 - y^2 - b = 0 \end{cases}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ constantes.}$$

- (a) Diga em que condições o sistema anterior define implicitamente  $x$  e  $y$  como função de  $z$ ,  $x = f(z)$  e  $y = g(z)$ , numa vizinhança de  $(x_0, y_0, z_0)$ .  
 (b) Determine  $f'(z_0)$ .

2. Considere a função

$$F(x, y) = (\varphi(x, y), \psi(x, y))$$

definida no conjunto

$$A = \{(x, y) : 0 \leq \varphi(x, y) \leq 1, 0 \leq \psi(x, y) \leq 2\},$$

com  $\varphi$  e  $\psi$  de classe  $C^1$  e em que  $|DF^{-1}(u, v)| \neq 0$ , com  $(u, v) \in ]0, 1[ \times ]0, 2[$ .

- (a) Utilizando integrais duplos e a fórmula de mudança de variável, exprima  $mes(A)$  em função de  $DF^{-1}(\bar{u}, \bar{v})$ , com  $(\bar{u}, \bar{v}) \in ]0, 1[ \times ]0, 2[$ .  
 (b) Deduza a fórmula de mudança de variável utilizada em a).

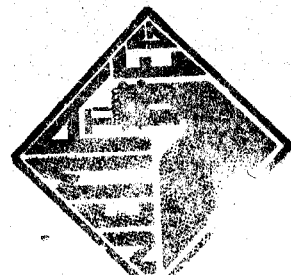
3. Considere o subconjunto  $E$  de  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -4 + \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}.$$

- (a) Faça um esboço de  $E$  e calcule o seu volume.  
 (b) Sendo  $S = FrE$ ,  $\vec{F} = (P, Q, R)$  de classe  $C^1$  em  $S$  e  $S$  orientada com a normal exterior, indique o valor de

$$\iint_S (\text{rot} \vec{F} | \hat{n}) dS,$$

justificando devidamente.



4. Considere o conjunto

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

(a) Calcule  $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$ .

(b) Calcule  $\iint_S \left( \vec{F} \mid \hat{n} \right) \, dS$ , onde  $S$  é a fronteira de  $V$ , orientada com a normal interior e

$$\vec{F} = (x^2y + 2xz, z - xy^2, z^2 + xy).$$

5. Seja  $C$  uma curva suave ligando os pontos  $A = (0, 0, 0)$  e  $B = (1, 1, 1)$ .

Calcule

$$\int_C 2y \, dx + (2x + ze^y) \, dy + (e^y + 1) \, dz.$$

6. Sejam

$$\vec{F} = (P(x, z), 0, R(x, z)) \text{ e } V = \{(x, y, z) : (x, z) \in A, |y| \leq K\},$$

em que  $A$  é um conjunto compacto, mensurável e simplesmente conexo, com fronteira de classe  $C^1$  e  $K$  representa uma constante positiva.

(a) Relacione

$$\iint_A \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \, dx \, dz \text{ com } \iint_S \left( \vec{F} \mid \hat{n} \right) \, dS,$$

em que  $S = Fr V$  e  $\hat{n}$  representa a normal exterior unitária.

(b) Exprima  $\iint_{S_L} \left( \vec{F} \mid \hat{n} \right) \, dS_L$ , em que

$$S_L = S \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in A \text{ e } y = \pm K\},$$

em função de um integral em  $Fr A$ .