Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Recurso de Análise Infinitesimal IV

Duração: 2h 30mn — 23 de Julho de 2001

1. Seja (x_0, y_0, z_0) uma solução do sistema definido por

$$\begin{cases} z^2 + xy - a = 0 \\ z^2 + x^2 - y^2 - b = 0 \end{cases}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ constantes.}$$

   (a) Diga em que condições o sistema anterior define implicitamente x e y como função de z, $x = f(z)$ e $y = g(z)$, numa vizinhança de (x_0, y_0, z_0).

   (b) Determine $f'(z_0)$.

2. Considere a função

$$F(x,y) = (\varphi(x,y), \psi(x,y))$$

   definida no conjunto

$$A = \{(x,y) : 0 \leqslant \varphi(x,y) \leqslant 1,\ 0 \leqslant \psi(x,y) \leqslant 2\},$$

   com φ e ψ de classe C^1 e em que $\left|DF^{-1}(u,v)\right| \neq 0$, com $(u,v) \in]0,1[\times]0,2[$.

   (a) Utilizando integrais duplos e a fórmula de mudança de variável, exprima $mes(A)$ em função de $DF^{-1}\left(\overline{u},\overline{v}\right)$, com $\left(\overline{u},\overline{v}\right) \in]0,1[\times]0,2[$.

   (b) Deduza a fórmula de mudança de variável utilizada em a).

3. Considere o subconjunto E de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -4 + \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 2 - x^2 - y^2\right\}.$$

   (a) Faça um esboço de E e calcule o seu volume.

   (b) Sendo $S = FrE$, $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ de classe C^1 em S e S orientada com a normal exterior, indique o valor de

$$\iint_S \left(rot\overrightarrow{F} \mid \hat{n}\right) dS,$$

   justificando devidamente.

4. Considere o conjunto

$$V=\left\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : 1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4 \ \text{ e } \ z\geqslant \sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

(a) Calcule $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$.

(b) Calcule $\iint_S \left(\overrightarrow{F}\mid \hat{n}\right)\,dS$, onde S é a fronteira de V, orientada com a normal interior e

$$\overrightarrow{F}=\left(x^2y+2xz, z-xy^2, z^2+xy\right).$$

5. Seja C uma curva suave ligando os pontos $A=(0,0,0)$ e $B=(1,1,1)$.
Calcule

$$\int_C 2y\,dx+(2x+ze^y)\,dy+(e^y+1)\,dz\,.$$

6. Sejam

$$\overrightarrow{F}=(P(x,z),0,R(x,z)) \ \text{ e } \ V=\{(x,y,z):(x,z)\in A,\ \ |y|\leqslant K\},$$

em que A é um conjunto compacto, mensurável e simplesmente conexo, com fronteira de classe C^1 e K representa uma constante positiva.

(a) Relacione

$$\iint_A\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdz \quad \text{com} \quad \iint_S\left(\overrightarrow{F}\mid \hat{n}\right)dS,$$

em que $S=Fr\ V$ e $\hat{n}$ representa a normal exterior unitária.

(b) Exprima $\iint_{S_L}\left(\overrightarrow{F}\mid \hat{n}\right)\,dS_L$, em que

$$S_L=S\setminus\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,z)\in A \text{ e } y=\pm K\right\},$$

em função de um integral em FrA.