DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

15

Exame de Análise Infinitesimal IV

Duração: 2h 30mn 27 de Junho de 2002

1. Sejam $\varphi, \psi : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com A aberto e (a,b,c) uma solução do sistema de equações

$$\begin{cases} x^2+y+\varphi(z)=0 \\ x-y+\psi(z)=0 \end{cases}.$$

   (a) Estabeleça condições que garantam a existência de funções diferenciáveis f e g, definidas numa vizinhança de a, tais que $(x, f(x), g(x))$ seja uma solução do sistema dado.

   (b) Calcule $f'(a)$ em função das derivadas de φ e ψ.

2. Considere a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 1 \wedge x^2+y^2+z^2=2\right\},$$

a curva

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 \wedge x^2+y^2=1\right\},$$

orientada no sentido negativo e a função

$$F(x,y,z) = \left(-2xz, g(x,y), y^2\right).$$

   (a) Recorrendo a um integral de superfície sobre S, calcule

$$\int_C -2xzdx + g(x,y)\,dy + y^2dz,$$

   em que g é uma função de classe C^2 e $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = (1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$.

   (b) Indique, justificando devidamente, o valor de

$$\iint_{S_1} (rotF \mid \widehat{n})\; dS,$$

   em que $S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2} \wedge x^2+y^2+z^2 \leq 2\right\}$ e $\widehat{n}$ representa a normal a S_1, unitária e orientada para cima.

   (c) Sendo $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq \sqrt{x^2+y^2} \wedge x^2+y^2+z^2 \leq 2\right\}$, estabeleça, usando coordenadas esféricas, uma expressão que permita calcular o volume de V.

3. Considere o conjunto

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1 \wedge \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \leq 1\right\}.$$

Calcule a área de A usando um integral curvilíneo e a função $F(x,y) = (-y,x)$.

4. (a) Prove que

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\, dxdydz = \iint_S Q\, n_2\, dS$$

em que V é um conjunto compacto, mensurável e simplesmente conexo, com fronteira de classe C^1, Q é uma função de classe C^1 e n_2 é a segunda componente da normal unitária exterior a S.

(b) Sejam

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq -1 + y^2 + z^2 \wedge x \leq 0\right\},$$
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -1 + y^2 + z^2 \wedge x \leq 0\right\}$$

e

$$F(x,y,z) = \left(1 + x^2 + 3x, xy, -3xz\right).$$

Sabendo que a medida de V, $m(V)$, é igual a α e que $\widehat{n}$ representa a normal a S, unitária e com componente positiva segundo Ox, determine

$$\iint_S (F \mid \widehat{n})\; dS,$$

em função de α.

5. Seja $F = (P, Q)$ uma função de classe C^1, definida em $\mathbb{R}^2$. Prove que F é um campo de vectores conservativo (i.e. existe $f : F = \nabla f$) se e só se

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\; dx + Q(x,y)\; dy$$

não depende do arco que liga A a B, para todo o A, $B \in \mathbb{R}^2$.