DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Análise Infinitesimal IV

Exame de Recurso

Duração: 2h 30mn 19 de Julho de 2002

1. Recorrendo à teoria de extremos determine os pontos do conjunto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 \wedge -2 \leq x \leq 2 \wedge z = 0\},$$

que se encontram, respectivamente, mais próximos e mais distantes do ponto $(0, 2, -10^3)$.

2. Considere a superfície S definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y \geq 0\}$$

e seja $\widehat{n}$ a normal unitária a S cuja segunda componente é negativa.

(a) Sendo

$$F(x, y, z) = (z^2 y^3, yz^2, x^2 y^3),$$

determine $\iint_S (F \mid \widehat{n})\, dS$.
(sugestão: use o Teorema de Gauss)

(b) Considere

$$G(x, y, z) = \left(-z\alpha + x, \sqrt{\alpha}\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \alpha x + z\right),$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$.
Calcule α de modo que $\iint_S (rot\,(G) \mid \widehat{n})\, dS = \pi$.

3. Determine o volume do sólido definido pelo conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x^2 + y^2 - z^2 + 1 \geq 0\}.$$

4. (a) Seja P uma função de classe C^1 em $\overline{D}$, em que D representa um domínio compacto, mensurável e simplesmente conexo e γ é a fronteira de D. Prove que

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_{\gamma} P(x, y)\, dx.$$

(b) Determine a área da porção de plano limitada pelo eixo Ox e por um arco de ciclóide

$$\begin{cases} x = a(t + \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases},$$

em que $a > 0$ e $0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) Deduza a fórmula de Rieman-Green utilizando o operador divergência e o integral curvilíneo ds.

5. Calcule

$$\int_\gamma (\sin y - y\sin x + x)\ dx + (\cos x + x\cos y)\ dy,$$

em que γ é o arco $\widehat{AB}$ da curva de equação $x^2 + y^2 = \pi^2$ que une os pontos $A(\pi, 0)$ e $B(0, \pi)$, que não está contido no 1ºquadrante.

6.

(a) Seja D um conjunto compacto, mensurável e simplesmente conexo. Defina

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D,\ x = \varphi(y, z)\right\},$$

em que φ é uma função de classe C^1.

i. Utilizando partições do conjunto D, defina medida de S, $m(S)$.

ii. Deduza uma fórmula de cálculo para $m(S)$.

(b) Sejam $V \subset \mathbb{R}^3$, compacto, mensurável, simplesmente conexo, $F : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$, de classe C^1 e $P_0 \in V$.

Mostre que se o diâmetro de V for suficientemente pequeno então

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \iint_S (F \mid \widehat{n})\ dS - divF(P_0).m(V) \right| < \varepsilon\ m(V),$$

em que $S = fr(V)$ e $\widehat{n}$ representa a normal a S, exterior e unitária.