

Análise Infinitesimal IV

Exame

Duração: 2h 30mn

18 de Junho de 2003

1. Sejam $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \text{int}(D)$. Diga em que condições a equação

$$x = F(x^2 + y, y^2)$$

define implicitamente y como função de x , numa vizinhança de (x_0, y_0) e calcule $y'(x)$.

2. Seja $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear tal que $Ax = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Defina-se

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} (Ax)^2.$$

Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para calcular $\|A\|$.

3. (a) Enuncie e prove o Teorema de Fubini, num conjunto D definido por

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

com φ e ψ contínuas.

- (b) Inverta a ordem de integração no seguinte integral:

$$\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy \right] dx.$$

4. (a) Seja

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D, y = \psi(x, z)\},$$

com ψ de classe C^1 e D compacto, mensurável, simplesmente conexo, com fronteira de classe C^1 . Seja $Q : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Estabeleça a fórmula que lhe permite calcular

$$\int_{\psi(\text{fr}(D)) \cap S} Q dy$$

em função de um integral de superfície em S .

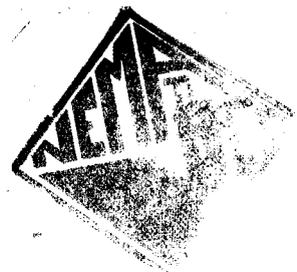
- (b) Considere a curva γ ,

$$\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2, x^2 + z^2 = 4\},$$

cujos sentido está definido de modo a que a sua projecção no plano xOz fique orientada de $(2, 0, 0)$ para $(0, 0, 2)$.

- i. Usando uma parametrização de γ , calcule

$$\int_{\gamma} z dx + 3yx dy + e^z dz.$$



ii. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2, x^2 + z^2 \leq 4\},$$

orientada com a normal unitária \hat{n} , com segunda componente positiva. Determine, usando i),

$$\iint_S ((0, 1, 3y) \mid \hat{n}) dS.$$

5. Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \geq z^2 \text{ e } z \geq 0\}.$$

(a) Calcule o volume de V .

(b) Considere a função

$$F(x, y, z) = \left(-2x, \frac{y^3}{3} - ye^x, -y^2z + ze^x + 4\right),$$

e as superfícies

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge (x^2 + y^2 + z^2 = 1 \vee x^2 + y^2 = z^2) \right\}.$$

Calcule $\iint_{S_1} (F \mid e_3) dS_1$ e $\iint_{S_2} (F \mid \hat{n}) dS_2$, em que e_3 é o terceiro vector da base canónica e \hat{n} representa a normal unitária a S_2 , apontando para o exterior de V .

6. (a) Sejam $f : S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, contínua e

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D \text{ e } x = \beta(y, z)\},$$

com $\beta \in C^1$ e D compacto, mensurável e simplesmente conexo. Deduza a fórmula de cálculo de

$$\iint_S f(x, y, z) dS.$$

(b) Calcule

$$\iint_S f(x, y, z) dS,$$

com $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2}$ e

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + x^2 = 1, z \geq \sqrt{2x^2 + y^2}, 0 \leq y \leq 3x\}.$$