DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Análise Infinitesimal IV
Exame

Duração: 2h 30mn | 18 de Junho de 2003

2 1. Sejam $F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in int\,(D)$. Diga em que condições a equação

$$x = F\left(x^2 + y, y^2\right)$$

define implicitamente y como função de x, numa vizinhança de (x_0, y_0) e calcule $y'(x)$.

2 2. Seja $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear tal que $Ax = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i$. Defina-se

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} (Ax)^2 .$$

Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para calcular $\|A\|$.

3. 2 (a) Enuncie e prove o Teorema de Fubini, num conjunto D definido por

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

com φ e ψ contínuas.

1.5 (b) Inverta a ordem de integração no seguinte integral:

$$\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y)\, dy\right] dx.$$

4. (a) Seja

2

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D,\ y = \psi(x, z)\right\},$$

com ψ de classe C^1 e D compacto, mensurável, simplesmente conexo, com fronteira de classe C^1. Seja $Q : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Estabeleça a fórmula que lhe permite calcular

$$\int_{\psi(fr(D))\circlearrowleft} Q\ dy$$

em função de um integral de superfície em S.

(b) Considere a curva γ,

$$\gamma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2,\ x^2 + z^2 = 4\right\},$$

cujo sentido está definido de modo a que a sua projecção no plano xOz fique orientada de $(2, 0, 0)$ para $(0, 0, 2)$.

1.5 i. Usando uma parametrização de γ, calcule

$$\int_\gamma z\, dx + 3yx\, dy + e^z\, dz.$$

1 ii. Considere a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2,\ x^2 + z^2 \leq 4\right\},$$

orientada com a normal unitária $\widehat{n}$, com segunda componente positiva. Determine, usando i),

$$\iint_S ((0,1,3y) \mid \widehat{n})\ dS.$$

5. Considere o conjunto

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \geq z^2 \text{ e } z \geq 0\right\}.$$

1.5 (a) Calcule o volume de V.

2.5 (b) Considere a função

$$F(x,y,z) = \left(-2x, \frac{y^3}{3} - ye^x, -y^2 z + ze^x + 4\right),$$

e as superfícies

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}, \\ S_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \ \wedge\ \left(x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \vee\ x^2 + y^2 = z^2\right)\right\}. \end{aligned}$$

Calcule $\underbrace{\iint_{S_1} (F \mid e_3)\ dS_1}_{1}$ e $\underbrace{\iint_{S_2} (F \mid \widehat{n})\ dS_2}_{1.5}$, em que e_3 é o terceiro vector da base canónica e $\widehat{n}$ representa a normal unitária a S_2, apontando para o exterior de V.

4 6. (a) Sejam $f : S \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua e

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D \text{ e } x = \beta(y,z)\right\},$$

com $\beta \in C^1$ e D compacto, mensurável e simplesmente conexo. Deduza a fórmula de cálculo de

$$\iint_S f(x,y,z)\ dS.$$

(b) Calcule

$$\iint_S f(x,y,z)\ dS,$$

com $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2}$ e

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + x^2 = 1,\ z \geq \sqrt{2x^2 + y^2},\ 0 \leq y \leq 3x\right\}.$$