DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Análise Infinitesimal IV
Exame de Recurso

Duração: 3h — 11 de Julho de 2003

1. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 - v^2 + u^2 \sin x + 4y^2 = 0 \\ u^2 + y^2 + x - 1 = 0 \end{cases}.$$

1 (a) Prove, usando o Teorema da Função Implícita, que este sistema define implicitamente y e v como função de x e u, numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, -1, 0, 2)$, e explique o significado desta afirmação.

1 (b) Sendo $g = (g_1, g_2)$ a função definida em (a), verifique se $(0,0)$ é um extremante local de g_1.

2. Considere a curva γ definida por

$$\gamma = \left\{(x,y,z) : z = x^2 + 4y^2 \text{ e } x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

1.25 (a) Usando o Método dos Multiplicadores de Lagrange, determine os pontos de maior cota e de menor cota de γ.

1.5 (b) Determine

$$\oint_\gamma -x^2 y \, dx + xy^2 \, dy + e^{\sin(z)} \, dz,$$

com γ orientada de modo a que a sua projecção no plano xOy tenha sentido positivo.

3. 2 (a) Enuncie o Teorema de Stokes e deduza, a partir dele, o Teorema de Rieman-Green.

1.5 (b) Determine $\displaystyle\oint_\delta y \, dx + 2 \, dy$, sendo $\delta = fr\,(R)$, δ orientada positivamente, e

$$R = \left\{(x,y) : 4x \geq y^2, x \leq 4 \text{ e } (x-2)^2 + (y+1)^2 \geq 1\right\}.$$

4. 2 (a) Sejam A compacto, mensurável e simplesmente conexo, α, β de classe C^1 e

$$V = \{(x,y,z) : (x,z) \in A, \alpha(x,z) \leq y \leq \beta(x,z)\},$$

com V simplesmente conexo. Considere ainda $Q : V \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2. Exprima $\displaystyle\iint_S Q \, n_2 \, dS$ em função de um integral triplo, em que $S = fr\,(V)$ [illegible] é a segunda componente da normal a S, exterior e unitária.

<u>Observação:</u> Não admita como resultado conhecido o Teorema de Gauss.

1 (b) Sejam

$$V = \{(x,y,z) : (y+4)^2 \geq x^2 + z^2 \text{ e } -4 \leq y \leq 2\},$$
$$F(x,y,z) = (3x^2, -2y, -6xz)$$

e S a porção de superfície cónica que limita V, orientada com a normal unitária $\widehat{n}$, voltada para o exterior de V.

Exprima

$$\iint_S (F \mid \widehat{n}) \; dS$$

em função do volume de V.

5. 1 (a) Sejam $D \subset \mathbb{R}^3$ compacto, mensurável e simplesmente conexo, com $fr\,(D)$ de classe C^1, $A,\ B \in D$ e $F = (P,Q,R) : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $rot\ F = 0$. Prove que

$$\int_{\widehat{AB}} P\ dx + Q\ dy + R\ dz,$$

com $\widehat{AB} \subset D$, não depende do arco que liga A a B.

(b) Seja C a curva definida por

$$C = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 - z^2 = -1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \text{ e } z \geq 0\},$$

com C orientada de modo a que a sua projecção no plano xOy tenha sentido negativo.

1 i. Calcule $\int_C x\ dy + 6z\ dz$, usando uma parametrização de C.

1 ii. Sendo $F(x,y,z) = (0, x, 6z)$ diga, justificando, se a função F é conservativa.

1.75 iii. Sendo

$$S_1 = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 - z^2 = -1,\ 1 \leq z \leq \sqrt{3}\right\},$$
$$S_2 = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 5,\ \sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{5}\right\},$$

e $S = S_1 \cup S_2$, determine, usando (i), o valor de

$$\iint_S n_3\ dS,$$

em que n_3 representa a terceira componente da normal a S, voltada para cima.

4 6. (a) Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto, mensurável e simplesmente conexo e D' tal que $D = G(D')$ com $G = (G_1, G_2)$ uma aplicação bijectiva de classe C^2 e de jacobiano não nulo. Prove que

$$\exists\ (u_0, v_0) \in D' : \frac{mes\,(D)}{mes\,(D')} = \left| \frac{\partial G_1}{\partial u}\frac{\partial G_2}{\partial v} - \frac{\partial G_2}{\partial u}\frac{\partial G_1}{\partial v} \right|_{(u_0,v_0)}.$$

(b) Sendo

$$R = \left\{(x,y) : 0 < a < xy < b,\ 0 < \alpha < \frac{y}{x} < \beta,\ x > 0,\ y > 0\right\},$$

mostre que $mes\,(R) = \left(\frac{b-a}{2}\right) \ln \frac{\beta}{\alpha}$.