Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal IV

1ª frequência

~~Primeiro Teste~~

Duração: 2h 30mn — 31 de Março de 2004

I

1. Considere a equação

$$e^{xy} = \psi\left(e^{z}, \sin y\right),$$

com ψ uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.

(a) Estabeleça condições sobre ψ que garantam que a equação anterior define implicitamente y em função de x e z, numa vizinhança de $(3, 0, 1)$.

(b) Calcule $\frac{\partial y}{\partial x}(3,1)$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(3,1)$.

II

1. (a) Esboce a seguinte região do plano

$$S = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2y,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ y \geq -x\right\}.$$

(b) Descreva a região anterior em coordenadas polares, apresentando um conjunto da seguinte forma:

$$S_1 = \left\{(r,\theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta,\ \varphi(\theta) \leq r \leq \psi(\theta)\right\}.$$

2. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1,\ 3z^2 \geq x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq 2\right\}.$$

Faça um esboço da região A e descreva-a em coordenadas esféricas.

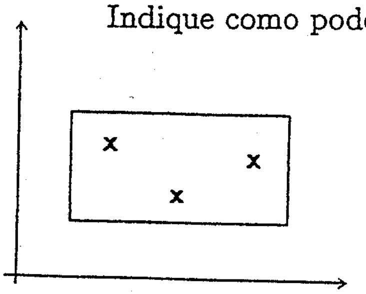
III

1. Seja f contínua e D compacto.

(a) Defina integral duplo de f em D e estabeleça um enquadramento para o valor do integral.

(b) Suponha que $D = [a,b] \times [c,d]$ e que conhece $f(\xi_i, \eta_i)$ nos pontos assinalados na figura.

Indique como poderia calcular um valor aproximado para $\iint_D f(x,y)\,dxdy$.



IV

1. Seja $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy.$$

2. Seja $\displaystyle\iint_D \frac{e^x}{x}\,dxdy$ dado pela expressão

$$I = \int_0^3 \int_{2-\sqrt{4-y}}^{y} \frac{e^x}{x}\,dxdy + \int_3^4 \int_{2-\sqrt{4-y}}^{2+\sqrt{4-y}} \frac{e^x}{x}\,dxdy.$$

   (a) Faça um esboço do conjunto D.

   (b) Reescreva a expressão I, invertendo a ordem de integração.

   (c) Calcule o valor de I.

V

1. (a) Considere o triângulo definido pelos planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ e $ax+by+cz+d=0$ $(a,b,c,d \neq 0)$. Usando o conceito de integral, determine uma relação entre a, b, c e d tal que a área do triângulo tenha o valor k.

   (b) Considere a superfície S definida por

$$S = \{(x,y,z) : (x,z) \in D,\ y = \varphi(x,z)\},$$

   com φ contínua e D compacto.
   Deduza uma expressão para a área de S.

2. Considere o sólido V limitado pelas superfícies

$$z = -x^2+4, y=2 \text{ e } z = 4-2y.$$

   Através de integrais simples iterados estabeleça uma expressão para o volume de V, considerando que:

   (a) A projecção de V é feita no plano xOy.

   (b) A projecção de V é feita no plano yOz.