Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal IV

Segundo Teste (2ª frequência)

Duração: 2h 30mn **2 de Junho de 2004**

---

1. (a) Seja $F = (P, Q, R)$ um campo vectorial de classe C^1 e γ uma curva de classe C^1. Deduza a fórmula de cálculo do integral curvilíneo de F em γ, apresentando, no final, a função integranda sob a forma de um produto escalar.

   (b) Considere a curva γ e o campo vectorial $F = (P, Q)$, com

$$P(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ e } Q(x,y) = \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

   representados na figura 1. Recorrendo à alínea anterior e às representações gráficas de F e γ diga, justificando, se o trabalho realizado pelo campo de forças F, no deslocamento de uma massa pontual, desde a posição A até à posição B, é positivo, negativo ou nulo.

   (c) Considere ainda as curvas α e β, representadas na figura 2. Calcule

   i. $\displaystyle\oint_{\delta\circlearrowleft} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, em que $\delta = \alpha \cup \beta$, recorrendo a um integral duplo;

   ii. $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ em que $\widehat{AB}$ é o arco da curva β descrito de $A = (0,1)$ até $B = (-3,0)$.

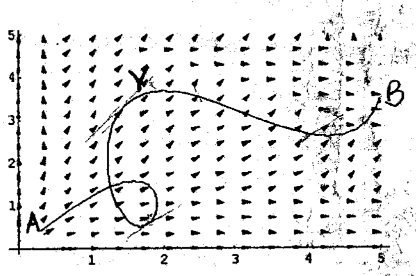

Fig.1

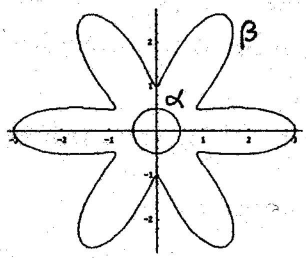

Fig.2

2. Considere o sólido V descrito por

$$V = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z^2 \le x^2+y^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

   Apresente uma expressão para o seu volume em termos de

   (a) um integral múltiplo em coordenadas cilíndricas;

   (b) um integral múltiplo em coordenadas esféricas.

3. (a) Considere o Teorema de Stokes aplicado à superfície S, orientada através da normal unitária $\widehat{n}$,

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in D \wedge z = \varphi(x, y)\}.$$

Deduza uma expressão para $\oint_{\gamma\circlearrowleft} R(x, y, z)\, dz$ em função de um integral de superfície em S.

(b) Seja C uma curva fechada, seccionalmente C^1, contida num plano cujo vector normal unitário é $\widehat{n} = (a, b, c)$. Mostre que a área da porção do plano cuja fronteira é a curva C é definida por

$$\frac{1}{2} \int_C (bz - cy)\, dx + (cx - az)\, dy + (ay - bx)\, dz,$$

com C orientada positivamente em relação a $\widehat{n}$.

(c) Considere a superfície S definida por

$$S = \left\{(x, y, z) : z = a\left(x^2 + y^2\right) \wedge\ z < 1\right\},$$

com $a > 0$, e o campo vectorial $F(x, y, z) = \left(-yz, xz, e^{xy}\right)$.
Determine a tal que o fluxo do rotacional de F através de S, segundo a normal com terceira componente positiva, seja igual a 4π.

4. Considere a superfície S definida por

$$S = \left\{(x, y, z) : z = 3 - x^2 - y^2 \wedge\ z \geq 0 \wedge y \geq x\right\},$$

com orientação canónica definida por $\widehat{n}$ e F a função vectorial definida em $\mathbb{R}^3$ por

$$F(x, y, z) = (x, 2y, z).$$

(a) Faça um esboço da parte da superfície S situada no primeiro octante.

(b) Estabeleça, usando coordenadas polares, uma expressão que lhe permita determinar a área de S.

(c) Exprima $\iint_S (F \mid \widehat{n})\, dS$ através de um integral duplo.

(d) Considere o sólido

$$E = \left\{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2 \wedge y \geq x\right\}$$

$P = \{(x, y, t) \in : z \geq 0 \wedge y \geq x$

e a superfície

$$T = \left\{(x, y, z) : y = x \wedge 0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2\right\}.$$

Sejam ainda $\alpha = \iint_S (F \mid \widehat{n})\, dS$ e $\beta = \iint_T \left(F \mid \widehat{k}\right) dT$, em que $\widehat{k}$ define a orientação de T e tem segunda componente positiva.
Exprima o volume de E em função de α e β.

(e) Considere as condições do Teorema de Gauss quando aplicado a um volume V de fronteira S e a um campo vectorial F. Suponha que P_0 é uma fonte, isto é, $divF(P_0) > 0$, com $P_0 \in V$. Interprete esta afirmação em função do conceito de fluxo.