Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal IV

Exame de Época Normal

Duração: 2h 30mn — 22 de Junho de 2005

I

1. Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto, simplesmente conexo e com fronteira regular. Considere o campo conservativo $F = (P, Q)$, em que $P,\ Q \in C^1 (D \setminus \{P_0\})$, com $P_0 \in int\,(D)$.

   Prove que

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \oint_{fr(D)\circlearrowleft} P\ dx + Q\ dy = \oint_{fr(B(P_0,\varepsilon))\circlearrowleft} P\ dx + Q\ dy.$$

2. Seja

$$G = (R, S) : E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

   uma finção contínua em que E é aberto e conexo. Suponha-se que $\forall A, B \in E$ o integral $\int_{\widehat{AB}} R\ dx + S\ dy$ não depende do arco que liga A a B.

   Prove que a função

$$H\,(M) = \int_{\widehat{AM}} R\ dx + S\ dy,$$

   com $M \in E$, é uma função potencial de G.

3. Seja $V : S \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em que S é uma superfície de bordo δ, que satisfaz as condições do Teorema de Stokes.

   Deduza uma expressão para

$$\oint_{\delta\circlearrowleft} V\,(x, y, z)\ dz,$$

   em função de um integral de superfície em S.

II

1. Considere o integral $\iint_D f\,(x, y)\ dydx$ escrito na forma

$$\int_0^{\sqrt{3}} \int_{\sqrt{3}\,x}^{2+\sqrt{4-x^2}} f\,(x, y)\ dydx.$$

   (a) Faça um esboço de D e inverta a ordem de integração.

   (b) Usando coordenadas polares, determine a área de D.

   (c) Supondo que $fr\,(D)$ está orientada no sentido negativo, relacione o valor de

$$\oint_{fr(D)} \left(4y + \ln \sqrt[3]{x+1}\right)\ dx + e^{\sin y}\ dy$$

   com o valor encontrado em b). Justifique devidamente a sua resposta.

2. Considere o sólido

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 \leq x^2 + y^2 \;\wedge\; x^2 + y^2 \leq 1 + z^2 \;\wedge\; z \geq 0 \right\}.$$

(a) Faça um esboço do conjunto A.

(b) Apresente, em coordenadas cilíndricas, uma expressão que permita determinar o volume de A.

3. Sejam

$$F(x,y,z) = \left(-xy + e^{x^2 z}, x^2 - y^2, 1\right)$$

um campo de vectores e C a curva de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases},$$

orientada no sentido positivo.

(a) Exiba quatro expressões diferentes para calcular

$$\int_C F \cdot dr,$$

utilizando três delas integrais de superfície e a quarta a fórmula de cálculo do integral curvilíneo.

(b) Utilize uma das expressões exibidas em a) para calcular o valor do referido integral.

4. Considere a pirâmide $P \subset \mathbb{R}^3$ limitada pelos três planos coordenados e pelo plano π de equação $x + y + z = 1$. Considere o campo vectorial

$$H(x,y,z) = \left(3,\; \left(z^3 + x^2\right) y,\; -x^2 z - \frac{1}{4} z^4\right).$$

Utilizando o Teorema de Gauss, calcule o fluxo de H através da face de P que está contida no plano π, no sentido da normal exterior.