Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

11

Análise Infinitesimal IV

Exame de Recurso

Duração: 2h 30mn — 15 de Julho de 2005

Justifique devidamente todas as suas respostas

I

1. Considere a superfície S tal que $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, sendo

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ z = \varphi(x,y)\}, \\ S_2 &= \{(x,y,z) : (x,y) \in fr(D),\ 0 \le z \le \varphi(x,y)\}, \\ S_3 &= \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ z = 0\}, \end{aligned}$$

com $D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$, sendo a e β funções continuas.

   (a) Deduza uma expressão, através de integrais simples, que lhe permita determinar a área de S. $\iint_D \sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+1}\ dxdy \longrightarrow \iint_D \varphi(x,y) - 0$

   (b) Seja $S = fr(V)$. Indique **uma** expressão que lhe permita calcular o volume de V através de um integral de superfície. $A(S) = \iint_S dS$

2. Sejam $H = (H_1, H_2, H_3) : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, com D aberto e simplesmente conexo, um campo conservativo de classe C^1 e h o seu potencial. Seja ainda $\widehat{AB} \subset D$.

   (a) Deduza uma expressão para $\int_{\widehat{AB}} H \,.\, dr$ em função do potencial h. $= f(B) - f(A)$

   (b) Deduza uma condição necessária e suficiente, em função de H_1, H_2 e H_3, que lhe permita garantir que H é conservativo. H .

   $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$ $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$

3. Suponha que $F = V_1 \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma função de classe C^1 em $V_1 \setminus \{P_0\}$, com divergência nula, sendo $P_0 \in int(V_1)$ e V_1 simplesmente conexo. Seja $V_2 \subset V_1$ um conjunto simplesmente conexo que contém P_0. Prove que

$$\iint_{fr(V_1)} (F \mid \widehat{n_1})\ dS = \iint_{fr(V_2)} (F \mid \widehat{n_2})\ dS,$$

em que $\widehat{n_1}$ e $\widehat{n_2}$ são as normais exteriores e unitárias a $fr(V_1)$ e $fr(V_2)$, respectivamente.

II

1. Seja D a região do 1º e 2º quadrantes definida por

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ (x-1)^2 + y^2 \geq 1,\ y \geq -x \text{ e } y \geq 0\}.$$

(a) Calcule $\iint_D dxdy$.

(b) Seja

$$A = \{(x,y) : x^2 + (y-1)^2 < a^2,\ a > 0\},$$

com a suficientemente pequeno tal que $A \subset int\,(D)$. Considere $E = D \backslash A$. Exprima o d o r de

$$\oint_{fr(E)} 2x + e^{\cos y}\ dy,$$

em função de a, considerando que $fr\,(E)$ está orientada positivamente.

2. Seja G o campo de vectores definido por

$$G(x,y) = \left(\frac{-y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}\right).$$

Calcule $\int_C G \cdot dr$, com

$$C = \{(x,y) : 4x^2 + 9y^2 = 36,\ x \geq 0\},$$

orientada de $A = (0,-2)$ para $B = (0,2)$.

3. Sejam V a região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \left\{(x,y,z) : z \geq \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2\right) \text{ e } z \leq 5 - \left(x^2 + y^2\right)\right\}$$

paraboloide elipt.

e $S = fr\,(V)$, orientada com a normal $\widehat{n}$, exterior e unitária.

Sendo $F = (y, -x, 1)$, determine o fluxo de F através de S, de dois modos diferentes. Gauss - F.C.I -

4. Seja E o sólido definido por

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq \frac{1}{3}\left(x^2 + y^2\right),\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ y \geq 0\right\}.$$

(a) Faça um esboço do corte obtido no conjunto E pelo plano yOz.

(b) Deduza uma expressão que permita calcular o volume de E,

i. usando coordenadas esféricas;

ii. usando coordenadas cilíndricas.

(c) sendo

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = \frac{1}{3}\left(x^2 + y^2\right) \text{ e } z = 1\right\},$$

e $H = (y^2 + z^2)\,\widehat{i} + \cos y\ \widehat{j} + e^z\ \widehat{k}$, indique, usando um integral de superfície, uma expressão que permita calcular o trabalho realizado pelo campo de forças H no deslocamento de uma partícula ao longo da curva C, no sentido positivo.

$\int F\, dr = \int P + Q + R$