Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal IV

Primeira Frequência

Duração: 2h 6 de Abril de 2005

I

1. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e D um conjunto compacto, mensurável e conexo.

   (a) Prove que
   $$\exists\,(\overline{x},\overline{y}) \in D : \iint_D f(x,y)\ dxdy = f(\overline{x},\overline{y})\ mes(D).$$

   (b) Seja g de classe C^1. Prove que
   $$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{r \longrightarrow 0} \frac{\displaystyle\iint_{B(0,r)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\ dxdy}{\pi r^2}$$

2. Considere
   $$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ \text{ e } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\right\},$$
   em que φ e ψ representam funções contínuas.

   Deduza uma fórmula para calcular $\displaystyle\iint_k f(x,y)\ dxdy$.

3. Considere a região K do 1^o quadrante, definida por
   $$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : m_1 x \leq y \leq m_2 x \ \text{ e } r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2\right\}.$$
   Represente K em coordenadas polares e deduza uma fórmula de mudança de variável para $\displaystyle\iint_k f(x,y)\ dxdy$.

II

1. Usando coordenadas polares, calcule a área da região D definida por
   $$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 \geq 9 \wedge \ x^2 + y^2 \leq 4 \wedge \ x \geq 0 \wedge y \geq x\right\}.$$

2. Considere o integral duplo $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dxdy$, definido em coordenadas polares por
   $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{2\cos\theta}^{\frac{2}{\cos\theta}} r^3\ drd\theta.$$

   (a) Faça um esboço do conjunto D.

(b) Exprima o integral anterior através de integrais simples iterados, em coordenadas cartesianas, considerando:

   i. [redacted] expressões da forma $\int_{\cdots}^{\cdots}\int_{\cdots}^{\cdots} \ldots \, dx\, dy$;

   ii. [redacted] expressões da forma $\int_{\cdots}^{\cdots}\int_{\cdots}^{\cdots} \ldots \, dy\, dx$.

3. Considere a superfície S definida por

$$S = \left\{(x,y,z) \in \ 1^o\text{octante} : x^2 + z^2 = 9 \wedge \ x + y \leq 2\right\}.$$

(a) Faça um esboço do conjunto S.

(b) Estabeleça uma expressão, através de integrais simples iterados, que permita calcular a área da superfície S.

4. Sejam S_1, S_2 e S_3 as superfícies obtidas, respectivamente, através das seguintes funções do programa MATHEMATICA: trocados

`SphericalPlot3D`[$\sqrt{2}$, {`theta`, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$}, {`phi`, 0, 2π}]

`CylindricalPlot3D`[$2 - r$, {`r`, 0, 1}, {`theta`, 0, 2π}]

`CylindricalPlot3D`[0, {`r`, 0, $\sqrt{2}$}, {`theta`, 0, 2π}]

Faça um esboço de S_1, S_2 e S_3 e do sólido limitado por estas três superfícies.