Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal IV

Segunda Frequência

Duração: 2h 6 de Junho de 2005

I

1. Sejam $M : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 em D, conjunto compacto, mensurável e simplesmente conexo, de fronteira γ, regular.

   Prove que
$$\iint_D \frac{\partial M}{\partial y}\, dxdy = -\oint_{\gamma\circlearrowleft} M\, dx.$$

2. Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa de classe C^1 e C a fronteira da região do plano xOy, limitada pelo gráfico de f, pelo eixo Ox e pelas rectas $x = a$ e $x = b$. Suponha que C está orientada positivamente. Mostre que
$$\int_a^b f(x)\, dx = -\oint_C y\, dx$$

II

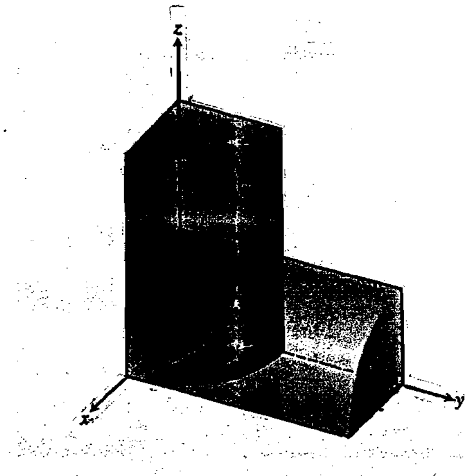
1. Seja $E \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto, mensurável e simplesmente conexo, de fronteira δ, curva de classe C^2. Seja $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, com $f \geq 0$, uma função de classe C^1.

   (a) Deduza uma expressão para a área de
$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in \delta,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$
   através de um integral curvilíneo ds.

   (b) Exprima o integral curvilíneo
$$\int_\delta f(x, y)\, ds$$
   em função da soma de um integral curvilíneo dx com um integral curvilíneo dy.

   (c) Exprima a área da superfície S em função de um integral duplo em E.

2. Seja B o subconjunto do 1ºoctante definido por
$$B = \left\{(x, y, z) \in \left(\mathbb{R}_0^+\right)^3 : x^2 + y^2 \leq 2,\ x^2 + z^2 \leq 2\right\}.$$



(a) Determine, através de integrais simples iterados, em coordenadas cilíndricas, uma expressão que permita calcular o volume de B.

(b) Considere a superfície

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \left(\mathbb{R}_0^+\right)^3 : x^2 + z^2 = 2,\ x^2 + y^2 \leq 2 \right\}.$$

Determine uma expressão que permita calcular a área de S :

i. através de um integral de superfície;

ii. através de um integral curvilíneo ds.

Nota: Desenvolva as expressões anteriores através das respectivas <u>fórmulas de cálculo</u>.

III

1. Sejam $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 e $A,\ B \in \mathbb{R}^3$. Suponha que $rotF = 0$. Utilizando o Teorema de Stokes, prove que o integral curvilíneo $\int_{\widehat{AB}} F \cdot dr$ não depende de trajectória que liga A a B.

2. Seja C a curva definida por

$$C = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ e } z - y = 1 \right\},$$

orientada de modo a que a sua projecção no plano xOy tenha sentido positivo.

(a) Faça um esboço da curva C.

(b) Considere a função vectorial $F(x,y,z) = \left(y, y^2, e^y + z\right)$. Usando um integral de superfície, calcule $\displaystyle\oint_C F \cdot dr$.

IV

1. Seja

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{3x^2 + 3y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\}.$$

(a) Faça um esboço do conjunto V.

(b) Defina V em coordenadas esféricas.

(c) Determine a massa do sólido V, sabendo que a sua densidade é dada pela função $\rho(x,y,z) = z^2$. $z = \rho \cos\varphi$

(d) Sendo $F(x,y,z) = \left(y \arcsin z, -x \arcsin z, \frac{2}{3}z^3\right)$, determine o fluxo de F através de S, em que $S = fr(V)$ e $\widehat{n}$ representa a normal a S, interior e unitária.