Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra — 02/04/08

Frequência I — Duração: 1h15m

Análise Infinitesimal IV — Licenciatura em Matemática

(3.0) **1.** Integrais paramétricos.

a) Define transformada de Laplace, $\mathcal{L}$, para uma função real de variável real, devidamente identificada, f, e mostra que

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s+a)\,,\ a \in \mathbb{R}^+\,.$$

b) Calcula $\mathcal{L}(e^{-at}\cos(bt))(s)\,,\ a \in \mathbb{R}^+\,,\ b \in \mathbb{R}\,.$

(3.0) **2.** Considera o conjunto

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x\,,\ x^2+y^2 \geq 1\,,\ x^2+y^2 \leq 2x\}\,.$$

a) Enuncia o teorema da mudança de variável para integrais múltiplos.

b) Representa geometricamente M, descreve-o em coordenadas polares e calcula $\displaystyle\int_M (x^2+y^2)\,dA\,.$

(4.0) **3.** Integrais múltiplos.

a) Representa geometricamente o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ y \geq -x, x^2+y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\},$$

descreve-o em coordenadas cilíndricas e calcula o integral

$$\int_M z\,dV\,.$$

b) Indica o integral que te permite calcular o comprimento da curva

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 2x,\ z = \sqrt{4-x^2-y^2},\ 0 \leq x-1 \leq y \leq \sqrt{3}\,(x-1)\}\,.$$

c) Calcula a área de superfície do conjunto

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 2x,\ 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}\,.$$

(3.5) **4.** Formas diferenciais.

a) Define produto exterior de duas aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$.

b) Sejam f, g duas funções reais de variável real de classe C^∞. Dada a forma diferencial $\alpha = dx + x\,dy + z\,f(x)\,g(y)\,dz$, determina a expressão canónica da forma diferencial $\omega = \alpha \wedge d\alpha$.

c) Determina expressão canónica da forma diferencial $\varphi^*\omega$, onde
$$\varphi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3,$$
definida por $\varphi(t, s, r) = (r \cos t \sin s\ ,\ r \sin t \sin s\ ,\ r \cos s)$, e $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$.

(3.5) **5.** Teorema de Green-Riemann.

a) Considera a forma diferencial $\omega = Q(x, y)\,dy$, onde Q é uma função real definida em $\mathbb{R}^2$. Enuncia e demonstra o teorema de Green-Riemann para a forma diferencial, ω, definida numa região $D \subset \mathbb{R}^2$ devidamente caracterizada.

b) Calcula o integral
$$\int_C \omega, \quad \text{onde} \quad \omega = -y\,dx + x\,dy$$
e C é a fronteira da região,
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 8xy < 1,\ y > x^2,\ x > y^2\},$$
percorrida no sentido positivo.
Interpreta geometricamente o resultado obtido.

(3.0) **6.** Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 1 \leq z \leq 2\}$ e ω uma forma diferencial de segundo grau de classe C^1 em U, definida por
$$\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx - 2z\,dx \wedge dy.$$

a) Calcula, justificando convenientemente, $\int_{\partial U} \omega$, onde ∂U tem orientação positiva definida pela normal exterior.

b) Sendo T a parte da fronteira de U determinada pela condição $x^2 + y^2 = 1$, considerada com orientação positiva definida pela normal exterior, calcula $\int_T \omega$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra 16/06/08
Exame DURAÇÃO: 2h30m
Análise Infinitesimal IV LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

(3.0) **1.** Integrais paramétricos.

a) Define transformada de Laplace, $\mathcal{L}$, para uma função real de variável real, devidamente identificada, f.

b) Defina produto de convolução, $*$, de duas funções, f, g, reais de variável real de tipo exponencial, e mostra que $\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\,\mathcal{L}(g)(s)$.

(3.0) **2.** Considera o integral descrito em coordenadas polares, $\displaystyle\int_A r^3\, dr\, dt$, onde $A = \{(t, r) \in [0, 2\pi[\times\mathbb{R}^+ : 0 < t < \pi/4\,,\ 2\cos t < r < 2/\cos t\}$.

a) Representa geometricamente A em coordenadas cartesianas.

b) Descreve o integral dado em coordenadas cartesianas. Justifica convenientemente.

(4.0) **3.** Integrais múltiplos.

a) Representa geometricamente o conjunto
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ y \geq -x\,,\ x^2 + y^2 \leq 2x\,,\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}\,,$$
descreve-o em coordenadas cilíndricas e calcula o seu volume.

b) Indica o integral que te permite calcular o comprimento da curva
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2x\,,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}\,\}\,.$$

c) Calcula a área de superfície do conjunto
$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > -x\,,\ x^2 + y^2 < 2x\,,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}\}\,.$$

(3.5) **4.** Formas diferenciais.

a) Define forma diferencial, ω, de grau $p \in \mathbb{Z}^+$ e classe C^2 sobre $D \subset \mathbb{R}^n$.

b) Mostra que $\omega = yz\cos(xz)\,dx + \sin(xz)\,dy + xy\cos(xz)\,dz$ é exacta em $\mathbb{R}^3$, e determina uma sua primitiva.

c) Determina expressão canónica da forma diferencial $\varphi^*\omega$, onde
$$\varphi : [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2,$$
definida por $\varphi(t, r) = (r\cos t\,,\, r\sin t)$, e $\omega = (x^2 + y^2)\,dx \wedge dy$.

(3.0) **5.** Integrais curvilíneos.

a) Seja ω uma forma diferencial de primeiro grau. Enuncia uma condição necessária e suficiente para que $\int_\ell \omega$, não dependa do caminho $\ell \subset \mathbb{R}^3$.

b) Calcula $\displaystyle\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy + e^{-z}dz$, onde $C = \{(x, y, a) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$ com $a \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}^+$. Comenta o resultado obtido.

(3.5) **6.** Considera em $\mathbb{R}^3$ a curva
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\,,\ x^2 + y^2 = 1\}$$
com orientação positiva, e a forma diferencial
$$\omega = \frac{-z}{x^2 + y^2 + z^2}\,dy + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}\,dz\,.$$

a) Enuncia o teorema de Stokes.

b) Calcula o integral $\displaystyle\int_C \omega$ por dois processos distintos.

c) Enuncia e comenta o teorema de Gauss-Ostrogradsky para a forma diferencial,
$$\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy\,,$$
definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^3$ devidamente caracterizado.

(3.0) **1.** Integrais paramétricos.

a) Define transformada de Fourier, $\mathcal{F}$, para uma função real de variável real, devidamente identificada, f.

b) Mostra que $\mathcal{F}(e^{-t^2/2})'(s) = -s\,\mathcal{F}(e^{-t^2/2})(s)$.

(3.0) **2.** Considera o conjunto

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\,,\ x^2 + y^2 \leq 2x\}\,.$$

a) Enuncia o teorema da mudança de variável para integrais múltiplos.

b) Representa geometricamente M, descreve-o em coordenadas polares e calcula $\displaystyle\int_M x\,dA$.

(4.0) **3.** Integrais múltiplos.

a) Representa geometricamente o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon\ 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\,,\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2\},$$

descreve-o em coordenadas cilíndricas e indica o integral que te permite calcular o volume de M.

b) Indica o integral que te permite calcular o comprimento da curva

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 = 1,\ z = x^2 + y^2\}\,.$$

c) Indica o integral que te permite calcular a área de superfície do conjunto

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ z = x^2 + y^2\}\,.$$

(3.5) **4.** Formas diferenciais.

a) Define forma diferencial, ω, de grau $p \in \mathbb{Z}^+$ e classe C^2 sobre $D \subset \mathbb{R}^n$.

b) Mostra que $\omega = 2x/z\,dx + 2y/z\,dy + (1-(x^2+y^2)/(z^2))\,dz$, definida no conjunto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, é exacta, e determina uma sua primitiva.

c) Determina expressão canónica da forma diferencial $\varphi^*\omega$, onde

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

definida por $\varphi(s,t,r) = (2s+t\,,\, s\,r\,,\, t-r)$, e $\omega = y\,dx - x\,dz$.

(3.0) **5.** Teorema de Green-Riemann.

a) Enuncia o teorema de Green-Riemann.

b) Calcula, utilizando o teorema de Green-Riemann, o integral

$$\int_D (x^2+y^2)\; dA,$$

onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : (x/a)^2 + (y/b)^2 < 1\}$, com $a, b > 0$.

(3.5) **6.** Seja, ω, uma forma diferencial de primeiro grau de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, definida por

$$\omega = x^2\,dx + (x^2+z^2)\,dy + (x^2+y^2+z^2)\,dz.$$

a) Enuncia o teorema de Stokes.

b) Calcula, por definição, o integral $\displaystyle\int_C \omega$, onde

$$C = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = R^2\}, \text{ com } R > 0.$$

c) Calcula, por definição, o integral $\displaystyle\int_U d\omega$, onde

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2\,,\; z \geq 0\}, \text{ com } R > 0.$$
