Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra — 31/03/09

Teste I — 00:30

Análise Infinitesimal IV — Lic. em Matemática

(1.5) 1. Sejam $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{g}(u,v) = (v/2\,,\, (v/2)^2 - u)$ e o conjunto

$$\mathbf{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x^2 + 1\,,\ 0 < x < 1\}\,.$$

a) Justifica que $\mathbf{g}$ define uma transformação de coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e calcula $|D\,\mathbf{g}|$.

b) Descreve o conjunto $\mathbf{S}$ no sistema de coordenadas associado a $\mathbf{g}$.

c) Descreve o conjunto $\mathbf{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x\,,\ 0 < x < 1\}$ no sistema de coordenadas polares.

(1.5) 2. Seja f uma função real de variável real de classe C^1. Considera a função real de variável real, F, definida em $\mathbb{R}^+$, de expressão analítica

$$F(y) = \int_{-y}^{y} (f(x+y) + f(x-y))\,dx\,.$$

a) Mostra que se f é ímpar, então F é constante.

b) Define transformada de Laplace para uma função real de variável real, devidamente identificada.

c) Determina a transformada de Laplace da função real de variável real, $y = y(t)$, solução do problema de Cauchy:

$$y'' + y = \cos t\,, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = -1\,.$$

(1.5) 3. Considera o conjunto $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\}$.

a) Descreve M no sistema de coordenadas associado a $\mathbf{g} : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{g}(u,v) = (u^3 \cos^3 v\,,\ u^3 \sin^3 v)$.

b) Enuncia o teorema da mudança de variável para integrais múltiplos do tipo $\displaystyle\int_D dA$, com $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto.

c) Calcula a área de M.

(1.5) 4. Seja $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4\,,\ x^2 + y^2 < 2\}$.

a) Determina o volume de N.

b) Calcula a área de superfície de
$Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2\,,\ x^2 + y^2 + z^2 < 4\,,\ z < 0\}$.

c) Calcula o comprimento da curva
$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\,,\ x^2 + y^2 = 2\,,\ z > 0\,,\ y < 0\}$.

(5.0) 5. Formas diferenciais.

a) Define produto exterior de duas aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$.

b) Determina a expressão canónica da forma diferencial
$$\omega = df - 3\,dg\,,$$
onde f, g são funções reais definidas em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ com expressões analíticas
$f(x,y) = xy\,,\quad g(x,y) = (x+2y)\ln(x^2+y^2)\,.$

c) Mostra que $\omega = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ é exacta em $\mathbb{R}^3$, e determina uma sua primitiva.

d) Determina expressão canónica da forma diferencial $\varphi^*\omega$, onde
$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,$$
definida por $\varphi(s,t,r) = (2s+t\,,\ s\,r\,,\ t-r)\,,$ e $\omega = y\,dx - x\,dz\,.$

(4.5) 6. Teorema de Green-Riemann.

a) Considera a forma diferencial $\omega = Q(x,y)\,dy$, onde Q é uma função real definida em $\mathbb{R}^2$. Enuncia e demonstra o teorema de Green-Riemann para a forma diferencial, ω, definida numa região $D \subset \mathbb{R}^2$ devidamente caracterizada.

b) Calcula, por dois processos distintos, o integral
$$\int_C \omega\,, \quad \text{onde} \quad \omega = -y\,dx + x\,dy$$
e C é a fronteira da região,
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x/2)^2 + y^2 \le 1\,,\ x > 0\,,\ y < 0\}\,,$$
percorrida no sentido positivo.

(4.5) 7. Seja, ω, uma forma diferencial de primeiro grau de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, definida por $\omega = x^2y^2\,dx + dy + z\,dz\,.$

a) Enuncia o teorema de Gauss-Ostrogradsky.

b) Calcula, por definição, os integrais $\int_{U_1} d\omega$ e $\int_{U_2} d\omega$, onde
$$U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 2\,,\ z \ge 0\}$$
$$U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 2\,,\ z = 0\},$$
orientadas com a normal dirigida para a parte positiva do eixo OZ.
Comenta o resultado obtido.

(3.0) 1. Integrais paramétricos.

a) Define transformada de Fourier, $\mathcal{F}$, para uma função real de variável real, devidamente identificada, f, e mostra que $\mathcal{F}(e^{-t^2/2})'(s) = -s\,\mathcal{F}(e^{-t^2/2})(s)$.

b) Determina, a transformada de Laplace, da função real de variável real, $y = y(t)$, solução do problema de Cauchy:

$$y'' + 4y' + 5y = 3e^{-2t}\,,\ y(0) = 4\,,\ y'(0) = -7\,.$$

(3.0) 2. Considera o conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\,,\ e^2 \leq x^2 + y^2 \leq e^4\}$.

a) Representa geometricamente M, descreve-o em coordenadas polares e calcula $\displaystyle\int_M \log(x^2 + y^2)\, dA$.

b) Calcula o comprimento da curva intersecção das superfícies S_1 e S_2, de equação cartesiana

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad x = y\,, \text{ respectivamente.}$$

(5.0) 3. Formas diferenciais.

a) Define forma diferencial, ω, de grau 2 e classe C^2 sobre $D \subset \mathbb{R}^3$.

b) Determina a expressão canónica da forma diferencial

$$\omega = d(f + g) + d(fg)\,,$$

onde f, g são funções reais definidas em $\mathbb{R}^2$ com expressões analíticas $f(x, y) = x^2 + y^2\,,\quad g(x, y) = x^3 - y^3$.

c) Determina a expressão canónica da forma diferencial

$$\omega \wedge d\omega\,,$$

onde ω é a forma diferencial de primeiro grau definida em $\mathbb{R}^3$

$$\omega = f(x, y, z)(a\,dx + b\,dy + c\,dz)$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e f uma função real de classe C^1 definida em $\mathbb{R}^3$.

d) Determina expressão canónica da forma diferencial $\varphi^*\omega$, onde

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,,$$

definida por $\varphi(s, t, r) = (s\,t\,,\ t\,r)\,,$ e $\omega = y^2\,dx - x\,dy\,.$

(4.5) 4. Teorema de Green-Riemann.

a) Considera a forma diferencial $\omega = P(x,y)\,dx$, onde P é uma função real definida em $\mathbb{R}^2$. Enuncia e demonstra o teorema de Green-Riemann para a forma diferencial, ω, definida numa região $D \subset \mathbb{R}^2$ devidamente caracterizada.

b) Calcula, por dois processos distintos, o integral

$$\int_C \omega\,, \quad \text{onde} \quad \omega = x^2\,dx + x\,dy$$

e C é a curva, de equação cartesiana $x^2 + y^2 = 6x$, percorrida no sentido positivo.

(4.5) 5. Seja, ω, uma forma diferencial de segundo grau de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, definida por $\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx - 2z\,dx \wedge dy$.

a) Enuncia o teorema de Gauss-Ostrogradsky.

b) Calcula os integrais $\displaystyle\int_{U_1} \omega$ e $\displaystyle\int_{U_1 \cup U_2} \omega$, onde

$$U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^2 = z\,,\ x^2 + y^2 < 1\}$$
$$U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\,,\ z = 3\},$$

com $\text{int}(U_1 \cup U_2)$ orientado positivamente com a normal exterior.
Comenta o resultado obtido.

	Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra	10/07/09
	Exame	02:30
	Análise Infinitesimal IV	Lic. em Matemática

(3.0) 1. Integrais paramétricos.

a) Define transformada de Fourier, $\mathcal{F}$, para uma função real de variável real, devidamente identificada, f.

b) Determina, usando transformadas de Laplace, a função real de variável real, $y = y(t)$, solução do problema de Cauchy:

$$y'' - 4y' + 4y = \sin t\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1\,.$$

(3.0) 2. Considera o integral $I = \displaystyle\int_{-2}^{0} \left(\int_{-4x-4}^{x^2} x\, dy \right) dx$

a) Inverte a ordem de integração, aplica o teorema de mudança de variável para coordenadas polares a I, e calcula o integral dado.

b) Identifica o integral que te permite calcular a área de superfície da região

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ x^2 + y^2 \leq 2x\}.$$

(5.0) 3. Formas diferenciais.

a) Define produto exterior de duas aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$.

b) Determina a expressão canónica da forma diferencial $\omega = df \wedge dg$, onde f, g são funções reais definidas em $\mathbb{R}^2$ com expressões analíticas $f(x, y) = x^2 y$ e $g(x, y) = xy^2$.

c) Mostra que $\omega = 2xy\, dx + (x^2 + \ln z)\, dy + y/z\, dz$, definida no conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, é exacta, e determina as suas primitivas.

d) Determina expressão canónica da forma diferencial $\varphi^*\omega$, onde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por $\varphi(t) = (\psi_1(t)\,, \psi_2(t))$, onde $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{C}^1$, e ω é a forma diferencial de segundo grau definida em $\mathbb{R}^2$, por $\omega = f(x, y)\, dx \wedge dy$.

(4.5) 4. Considera a forma diferencial $\omega = (\sin(xy) + xy\cos(xy))\,dx + x^2\cos(xy)\,dy$.

a) Calcula $\int_{C_1} \omega$, onde $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = \pi\}$, orientada positivamente.

b) Calcula $\int_{C_2} \omega$, onde C_2, é o arco de parábola $x = y^2$ percorrida de $(\pi, \sqrt{\pi})$ até $(0,0)$.

(4.5) 5. Seja, ω, uma forma diferencial de segundo grau de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, definida por $\omega = (y^2 + z^2)\,dx + (z^2 + x^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$.

a) Enuncia o teorema de Stokes.

b) Calcula os integrais $\int_{U_1} d\omega$ e $\int_{U_2} d\omega$, onde

$$U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z = 1\,,\ z \geq 0\}$$
$$U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ z \leq 0\}$$

com U_1 e U_2, orientadas com a normal dirigida para a parte positiva do eixo OZ.

Comenta o resultado obtido.