

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA FCTUC
Análise Infinitesimal IV
8 de Junho de 2010

1. Utilize coordenadas polares para calcular

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xydydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xydydx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xydydx$$

com um único integral duplo. Calcule esse integral duplo.

2. Considere o campo vectorial $F(x, y) = (e^{x^3} + 5xy^2 - 2y, \operatorname{sen}y^2 + 5x^2y)$

- (a) Verifique se F é conservativo.
(b) Utilize o Teorema de Green para calcular o trabalho realizado por F no deslocamento de uma partícula ao longo da fronteira da região limitada pelas curvas

$$x = (y - 2)^2, y = -x + 4$$

3. Considere o campo vectorial F definido por

$$F(x, y, z) = \left(x, \frac{x}{2}, -zx\right)$$

e a superfície S definida por

$$S = \{(x, y, z); y = 4 - (x^2 + z^2), x^2 + (z - 1)^2 \leq 1\}$$

- (a) Faça um esboço de S .
(b) Calcule a função G tal que $G = \operatorname{rot}F$
(c) Usando o Teorema de Stokes calcule $\iint_S (G \cdot \hat{n}) dS$ em que \hat{n} representa a normal exterior unitária, orientada no sentido positivo do eixo dos Oy .

4. Seja

$$F(x, y, z) = (e^{yz} \operatorname{sen}^2 z + x, -4y, 5z + e^{yx} \cos y)$$

e o sólido K definido por

$$K = \{(x, y, z); x^2 + (y - 2)^2 + z^2 \leq 4, y \leq 2\}.$$

orientado com a normal exterior

- (a) Calcule o fluxo de F através da fronteira de K .

(b) Calcule o fluxo de F através da face esférica do sólido.

5. Seja S uma esfera centrada na origem e de raio R .

(a) Prove ,utilizando argumentos de simetria ,que

$$\iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \iint_S z^2 dS.$$

(b) Use a alínea a) para calcular $\iint_S x^2 dS$.

6. Seja K um conjunto que é simultaneamente de tipo I, II, III e que tem fronteira S de classe C^1

(a) .Seja $f : K \rightarrow R$ uma função de classe C^1 . Estabeleça uma expressão para

$$\iiint_K \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz$$

em função de um integral de superfície em S .

(b) Prove que

$$\iint_S xn_1 + yn_2 + zn_3 dS = 3 \text{ volume de } K.$$

em que $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$ representa a normal exterior unitária.