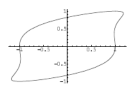
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA FCTUC
Análise Infinitesimal IV
25 de Maio de 2010

1. Considere o campo vectorial
$$F(x,y) = (cosxseny + 2xy, senxcosy + x^2 + 2y)$$
e a curva C parametrizada por $r(t) = (cos3t + sent, cost), 0 \leq t \leq 2\pi$.

   (a) Calcule
   $$\int_{\widehat{AB}} F.dr$$
   em que $A = r(0)$ e $B = r(\pi/2)$.

   (b) Exprima a área da região delimitada pela curva C em função de um integral em $[0, 2\pi]$.

   Curva C: 

   (c) Sejam $D \subset R^2$ e C a sua fronteira.Estabeleça a forma vectorial do Teorema de Riemann-Green:
   $$\int_C (F\,|\widehat{n}\,)\,ds = \int\int_D \operatorname{div} F dxdy$$
   em que $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ é uma função de classe C^1 e $\widehat{n}$ representa a normal unitária exterior ao conjunto D.

2. Considere o sólido $Q = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq \ 4, x + z \leq 0\right\}$.Sejam T a superficie plana que delimita Q, orientada com a normal unitária $\widehat{n_1}$ exterior a Q, e $F(x,y,z) = (2y - z, x^3, z)$.

   (a) Calcule, usando a definição, $\displaystyle\iint_T (F\,|\widehat{n_1})dT$.

   (b) Calcule $\displaystyle\iint_S (F\,|\widehat{n_2})dS$, em que S é a parte curva da superficie que delimita Q orientada com a normal unitária $\widehat{n_2}$ exterior a Q .

3. Considere um cubo K,situado no 1^o octante e cuja base é definida por $(0,0,0), (2,0,0), (2,2,0), (0,2,0)$.Retire a K um cubo com aresta de comprimento 1 e de que $(2,2,2)$ é um dos vértices.Seja S a fronteira do sólido assim obtido e seja $\widehat{n}$ a normal unitária exterior a S. Defina $F(x,y,z) = (x,y,z)$.Calcule $\displaystyle\iint_S (F\,|\widehat{n})dS$.

4. (a) Seja C uma curva fechada, seccionalmente C^1, contida num plano cujo vector normal unitário é $\widehat{n} = (a, b, c)$.Mostre que a área da porção do plano cuja fronteira é a curva C é definida por

$$\frac{1}{2}\int_C (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz$$

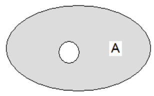
em que C tem a orientação induzida por $\widehat{n}$.

   (b) Considere a superfície S definida por $S = \left\{(x, y, z); z = ax^2 + y^2, z < 1\right\}$,em que $a > 0$.Seja

$$F(x, y, z) = (-yz, xz, e^{xy}).$$

Determine a tal que o fluxo de $rotF$, através de S, segundo a normal com terceira componente positiva, seja igual a 4π.

5. Considere uma superfície S, definida por $S = \{(x, y, z); z = f(x, y), (x, y) \in A\}$ em que f é uma função de classe C^1 e A é um conjunto não simplesmente conexo como representado na figura.



   (a) Estabeleça o Teorema de Stokes para uma função $F : S \to R^3$ com F de classe C^1.

   (b) Seja

$$S = \left\{(x, y, z); z = 9 - x^2 - y^2, 1 \leq z \leq y + k\right\}$$

em que k é tal que a projecção de S em XOY é um conjunto do tipo do representado na figura. Seja F definida em S por

$$F(x, y, z) = (yz, xz, xy).$$

Faça um esboço de S e, utilizando a alínea (a), calcule

$$\int_{C_1} F.dr$$

em que C_1 é a curva de intersecção de $z = 9 - x^2 - y^2$ com $z = y + k$.