ANÁLISE INFINITESIMAL IV

7/4/2010

1. Exprima a área da região plana D definida por

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

através de integrais duplos em coordenadas polares. Não faça o cálculo dos integrais.

2. Calcule o volume de um cone de equação

$$z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2 + y^2)$$

entre

$$z = 0 \text{ e } z = h.$$

3. Suponha que F é um campo vectorial definido numa curva suave γ.

a. Seja F conservativo. A curva γ tem extremidades A e B. Deduza o valor de

$$\int_{\gamma} F.dr$$

em função do potencial de F.

b. Prove que

$$F(x,y) = (2x\arctan y, \frac{x^2}{1+y^2})$$

é um campo conservativo e calcule

$$\int_{C} F.dr$$

em que

$$C = \left\{(x,y); y = \ln x \text{ e } e \leq x \leq e^2\right\}$$

orientada da esquerda para a direita.

4.

a. Considere uma curva suave γ e seja $g : \gamma \to R$ uma função de classe C^1. Sendo S definida por

$$S = \{(x,y,z) : (x,y) \in \gamma, z = g(x,y)\},$$

utilize o integral curvilineo ds para deduzir uma expressão para a área de S.

b. Considere um contentor cilindrico cuja base é modelada por

$$(3\cos t, 3sent),\ t \in [0, 2\pi],$$

e ao qual foi feito na extremidade superior um corte modelado pela função

$$z = 2 + \frac{1}{2} sen 3t.$$

Calcule a área da superfície lateral do contentor.

5.

a. Considere um conjunto D não simplesmente conexo. Enuncie e prove o Teorema de Green para tal conjunto.(Suponha por exemplo que se tratava de um conjunto tipo coroa circular.)

b. Seja F(x,y)=($\frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}, \frac{1-x}{(x-1)^2+(y-1)^2}$). Calcule

$$\int_C F.dr$$

em que C representa a curva

$$C = \{(x,y); (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4\}$$

orientada em sentido directo.

c. Indique o valor de

$$\int_D F.dr$$

em que

$$D = \left\{(x,y); x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\right\}.$$

6. Sejam D um conjunto simplesmente conexo com fronteira de classe C^1 e u uma função definida erm D de classe C^2. Seja ainda P$\in D$. Suponha que a bola fechada, $B(P,\rho)$, centrada em P e de raio ρ, está contida em D, para $0 < \rho < R$. Defina

$$F(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_C u(x,y) ds,$$

em que C representa a fronteira de $B(P,\rho)$.

a. Prove que $\lim_{\rho \to 0} F(\rho) = 2\pi u(P)$.

b. Represente por n a normal unitária exterior a C . Mostre que

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{B(P,\rho)} \Delta u dx dy$$

em que $\frac{\partial u}{\partial n}$ representa a derivada segundo a normal e $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

c. Prove que

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \iint_{B(P,\rho)} \Delta u dx dy.$$