ANÁLISE INFINITESIMAL IV
6/4/2010

1. Calcule a área da região plana D definida por

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0 \text{ e } x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Calcule o volume do sólido situado no 1º octante que está limitado pelo parabolóide

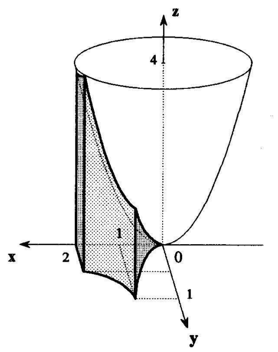
$$z = x^2 + y^2$$

e pelas superfícies cilindricas

$$y = x^2 \text{ e } xy = 1$$

e ainda pelos planos

$$x = 2,\ y = 0 \text{ e } x = 0.$$



3. O cilindro de equação

$$x^2 + y^2 = x$$

divide a superfície esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

em duas superfícies S_1e S_2, em que S_1 está dentro do cilindro e S_2 está fora do cilindro.

Sendo $A(S_i),\ i = 1,2$ a área de S_i, estabeleça uma expressão para $\frac{A(S_1)}{A(S_2)}$.

4.

a. Considere uma curva suave γ e seja $g : \gamma \to R$ uma função de classe C^1. Sendo S definida por

$$S = \{(x,y,z) : (x,y) \in \gamma, z = g(x,y)\},$$

utilize o integral curvilineo ds para deduzir uma expressão para a área de S.

b. Considere um contentor cilindrico cuja base é modelada por

$$(\cos t, sent),\ t \in [0, 2\pi],$$

e ao qual foi feito na extremidade superior um corte modelado pela função

$$z = 2 + \frac{1}{2} sen 3t.$$

Calcule a área da superfície lateral do contentor.

5.

a. Seja C o segmento que liga (x_1, y_1) a (x_2, y_2). Mostre que

$$\int_C xdy - ydx = x_1y_2 - x_2y_1.$$

b. Utilizando o teorema de Rieman-Green prove que a área $A(D)$ de um conjunto D se pode exprimir através de

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{FrD} xdy - ydx.$$

c. Os vértices de um polígono convexo, considerados na ordem anti-horária, são os pontos $(x_i, y_i), i = 1, \ldots n$. Mostre que a área do polígono é definida por

$$A = \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \ldots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)]$$

6. Sejam D um conjunto simplesmente conexo com fronteira de classe C^1 e u uma função definida erm D de classe C^2. Seja ainda P$\in D$. Suponha que a bola fechada, $B(P,\rho)$, centrada em P e de raio ρ, está contida em D, para $0 < \rho < R$. Defina

$$F(\rho) = \frac{1}{\rho}\int_C u(x,y)ds,$$

em que C representa a fronteira de $B(P,\rho)$.

a. Prove que $\lim_{\rho\to 0} F(\rho) = 2\pi u(P)$.

b. Represente por n a normal unitária exterior a C. Mostre que

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{B(P,\rho)} \Delta u dxdy$$

em que $\frac{\partial u}{\partial n}$ representa a derivada segundo a normal e $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

c. Prove que

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\iint_{B(P,\rho)} \Delta u dxdy.$$

```
ERROR: syntaxerror
OFFENDING COMMAND: --nostringval--

STACK:

/Title
()
/Subject
(D:20100406134303+01’00’)
/ModDate
()
/Keywords
(PDFCreator Version 0.9.5)
/Creator
(D:20100406134303+01’00’)
/CreationDate
(user)
/Author
-mark-
```