Departamento de Matemática-F.C.T.U.C
Análise Infinitesimal IV
2^a Frequência-24/5/2011

1. Sejam
$$V = \left\{(x, y, z); x \geq -1 + y^2 + z^2 \wedge x \leq 0\right\},$$
e
$$S = \left\{(x, y, z); x = -1 + y^2 + z^2 \wedge x \leq 0\right\},$$
orientada com a normal com componente positiva segundo o eixo OX.Defina
$$F(x, y, z) = (1 + x^2 + 3x, xy, -3xz).$$
Sabendo que a medida de V é β, calcule o fluxo de F através de S, em função de β.

2. Seja
$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(x, y, z).$$
a. Verifique se F é um campo rotacional(ie se $\exists G, rotG = F$), num paralelipípedo aberto que não contenha a origem.
b.Calcule **directamente** o fluxo de F através de S,com
$$S = \left\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 9\right\}$$
e em que n é a normal exterior unitária a S.
c. O resultado obtido em **b**. contraria o Teorema da Divergência?Justifique a sua resposta.
d.Calcule o fluxo de F através da superficie do elipsóide
$$T = \left\{(x, y, z); \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1\right\}$$
quando orientada com a normal interior.

3. Utilizando o Teorema de Stokes, calcule $\displaystyle\int_C F.dr$ em que
$$F(x, y, z) = (z - y, -x - z, -x - y)$$
e C é a curva de equações
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ y = z, \end{cases}$$
orientada no sentido directo.

4. Indique o valor lógico das afirmações,justificando a sua resposta:

   a.Seja K um cubo situado no 1^o octante, de aresta igual à unidade, com um vértice em $(0,0,0)$. Seja S a superfície formada pela face superior e pelas faces laterais de K .Seja $F(x,y,z) = (3y^2 senz, e^{z^2}, 17e^y)$. Então o fluxo de F através de S, quando orientada com a normal que aponta no sentido positivo do eixo dos z, vale $17(1-e)$.

   b. Seja $f : V \to R$ uma função harmónica ($f \in C^2, \Delta f = 0$), V um conjunto simplesmente conexo e n a normal exterior unitária a FrV,com $FrV \in C^1$.Então

$$\iint_{FrV} f\frac{\partial f}{\partial n} dS = \iiint_V \|\nabla f\| \, dxdydz.$$

   c. Seja F um campo vectorial de classe C^1e seja S a superficie cilindrica

$$S = \left\{(x,y,z); x^2+y^2=4, 1 \le z \le 2\right\}$$

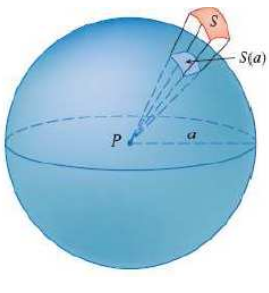
   orientada com a normal exterior.Representamos por γ_1 e γ_2 as circunferências $x^2+y^2=4, z=1,2$,percorridas no sentido directo.Então

$$\iint_S (rotF\,|n) dS = \int_{\gamma_1} F.dr + \int_{\gamma_2} F.dr.$$

5. Seja S uma superfície de classe C^1 e seja P um ponto tal que todo o segmento que liga P a S intersecta S num num só ponto. O angulo sólido subtenso por S, $\Omega(S)$, é o conjunto daqueles segmentos e a sua medida define-se por

$$\Omega(S) = \frac{areadeS(a)}{a^2}$$

   em que $S(a)$ representa a intersecção de $\Omega(S)$ com a esfera centrada em P e de raio a.Prove que med $\Omega(S)$ não depende de a.



   Sugestão-Aplique o Teorema da divergência a $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x,y,z)$ e ao subconjunto de $\Omega(S)$ de bases $S(a)$ e S.