Departamento de Matemática- FCTUC
Análise Infinitesimal IV-6/6/2011

1. **a.**Determine as equações das superfícies que definem a fronteira do conjunto K cujo volume se pode representar por

$$\int_{\gamma} (ay^3 + byx^2)dx + (2x + y^2x)dy,$$

com $a > \frac{1}{3}$ e $b > 0$ e em que γ é a curva de equação

$$\frac{3a-1}{2}y^2 + \frac{b}{2}x^2 = 1.$$

orientada em sentido directo.

b. Calcule o volume de K,no caso $a = 1, b = 2$.

2. Seja $F(x, y, z) = (x+3z, z+y, 4y)$ e $\gamma=\widehat{ABCDA}$ com $A = (2, -2, 0), B = (-2, 2, 0), C = (-1, 1, 1)$ e $D = (1, -1, 1)$.

a.Calcule
$$\int_{\gamma} F.dr.$$

b.Calcule a área do polígono de fronteira γ.

3. Seja
$$F(x, y, z) = (z - y, -x - z, -x - y)$$
e C a curva de equações
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ y = z, \end{cases}$$
orientada no sentido directo.Calcule $\int_C F.dr$, em que C está orientada em sentido directo.

4. Considere a superficie S de equação
$$x^2 + y^2 + z - 10 = 0, z \geq 9$$
orientada com a normal que aponta no sentido negativo do eixo dos zz. Calcule o fluxo do campo vectorial
$$F(x, y, z) = (z\arctan(y)^2, z^3\ln(x^2 + 1), z^5)$$
através de S.

5. Indique o valor lógico das seguintes afirmações,**justificando a sua resposta.**

   a.Seja L uma curva de classe C^1que liga $(0,0)$ a (π,π).Então

   $$\int\limits_L (xseny+1)dx + \frac{x^2\cos y}{2}dy = -\pi.$$

   b.Defina o conjunto

   $$K(a,b,c) = \{(x,y,z); |x-a|+|y-b|+|z-c| \leq 1\}$$

   Considere o campo vectorial $F = (P,Q,R) : K \to R^3$, tal que $F \in C^1(K \setminus (a,b,c))$.Sabendo que $\operatorname{div} F = 0$,então

   $$\int\limits_{FrK(a,b,c)} (F\,|n_1)dS = \int\limits_{FrB((a,b,c),r)} (F\,|n_2)dS$$

   em que $B((a,b,c),r)$ é uma bola aberta centrada em (a,b,c) e de raio r contida em $K(a,b,c)$ e n_1 e n_2 são normais interiores unitárias.

   c.Seja $K \subset R^3$ um conjunto simplesmente conexo com fronteira S de classe C^1.Verifica-se a seguinte igualdade

   $$\iint\limits_S xn_1 + yn_2 + zn_3 dS = -3volumedeK,$$

   em que (n_1,n_2,n_3) representa a normal exterior unitária.

6. Seja f uma função contínua.Prove que

   $$\int\limits_0^x\int\limits_0^y\int\limits_0^z f(t)dtdzdy = \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2 f(t)dt.$$