

Departamento de Matemática- FCTUC
Análise Infinitesimal IV-14/4/2011

1. Calcule o volume do sólido definido por

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \\ 1 \leq z \leq 12 - 3x - 4y \end{cases} .$$

2. Considere a superfície de equação

$$x^2 + z^2 = a^2$$

situada no 1º octante e dentro da superfície de equação

$$x^2 + y^2 = 2ay.$$

Exprima a sua área sob a forma de um integral duplo.

3. Calcule

$$I(p, r) = \iint_D \frac{1}{(p^2 + x^2 + y^2)^p} dx dy$$

no conjunto $D = \{(x, y); 0 \leq x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Indique os valores de p para os quais existe $\lim_{r \rightarrow \infty} I(p, r)$.

4. Estabeleça o valor lógico das seguintes igualdades justificando a sua resposta

$$(a) \int_0^a \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx dy = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx$$

$$(b) \iint_D f(x+y) dx dy = \int_{-1}^1 f(u) du, \text{ em que } D = \{(x, y); |x| + |y| \leq 1\}.$$

$$(c) \int_C \frac{y-1}{(x-3)^2 + (y-1)^2} dx - \frac{x-3}{(x-3)^2 + (y-1)^2} dy = 0, \text{ em que } C \text{ é a curva limitada pelo eixo dos } y \text{ e pela parábola de equação } 5 - x = y^2.$$

5. Considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (z \cos xz + y, x, x \cos xz).$$

Calcule $\int_C F \cdot dr$ em que C é a curva de equações

$$x = \cos t, y = \sin t, z = t, t \in [0, \pi].$$

6. Sejam D um conjunto simplesmente conexo com fronteira de classe C^1 e P um ponto de D . Seja ainda u uma função de classe C^2 . Defina

$$F(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_{\gamma} u(x, y) ds,$$

em que γ representa a fronteira de uma bola $B(P, \rho)$ contida em D .

- (a) Prove que $\lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho) = 2\pi u(P)$.

- (b) Mostre que $\int \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int \int_{B(P, \rho)} \Delta u dx dy$, em que $\frac{\partial u}{\partial n}$ representa a derivada normal e $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

- (c) Prove que $\frac{dF}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \int \int_{B(P, \rho)} \Delta u dx dy$.