Análise Infinitesimal III
10 de Novembro de 2010
Duração-2h

1.Defina a função

$$f(x,y) = \begin{cases} (b-1)\frac{sen(x^2+y^2-r)}{x^2+y^2-r}, x^2+y^2<r \\ c, x^2+y^2=r \\ a+e^{-\frac{1}{|x^2+y^2-r|}}, x^2+y^2>r \end{cases}.$$

em que $a,b,c \in R$ e $r \in R^+$.

a)Estabeleça uma relação entre a,b e c de modo a garantir continuidade de f em R^2.

b)Para valores de a,b,c que satisfaçam a relação estabelecida na alínea anterior calcule $\lim\limits_{n\to\infty} f^2(P_n)$ em que

$$(P_n) = (\frac{\sqrt{2r}}{2} nsen\frac{1}{n}, \frac{\sqrt{2r}}{2}[\ln(e+\frac{1}{n}) + \frac{\ln(n^2)}{n}]).$$

2.Considere a função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2\cos(x+\frac{\pi}{2})}{y^2+(y-x)^2}, xy \neq 0 \\ 4sen(\frac{\pi}{4}y), xy=0 \end{cases}.$$

a) Estude a continuidade de f no conjunto $A = \{(0,y); 0 \leq y \leq 1\}$.

b) Analise a existência da derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0), v \neq (0,0)$.

c) Estude a diferenciabilidade de f em A.

3.Seja $f: D \subset R^2 \to R$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^p y}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Discuta a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$ em função do parametro real positivo p.

4.Indique o valor lógico das afirmações,justificando a sua resposta:

a) "A função f não é contínua em R^2" ,

em que é definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-2)(y+3)sen[(x-2)(y+3)]}{(x-2)^2+(y+3)^2}, (x,y) \neq (2,-3) \\ 0, (x,y) = (2,-3). \end{cases}.$$

b)"Sendo $H(x,y) = 2x + max(x^2,y^2)$ então $DH(0,0) = [2 \;\; 2]$ "

A prova tem uma segunda página

5.

a)Seja $f : D \subset R^n \to R$, uma função diferenciável, em que D é um conjunto aberto.Prove que existem as derivadas direccionais $\frac{\partial f}{\partial v}(P_0), \forall v \in R^n \setminus \{0\}$ e que $\frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = Df(P_0)v$.

b)Suponha que $\{v_1, v_2, ...v_n\}$ é um conjunto de vectores linearmente independentes em R^n e que

$$\frac{\partial f}{\partial v_i}(P_0) = \alpha_i, i = 1, 2....n.$$

com α_i conhecidos.Seja $w \in R^n, w \neq 0$.Calcule $\frac{\partial f}{\partial w}(P_0)$.

.