Exame normal
Análise Infinitesimal III

1) a) Sejam $D_1=\{(x,y); x+y>0\}$, $D_2=\{(x,y); x+y=0\}$ e $D_3=\{(x,y); x+y<0\}$
Em D_1 e D_3 f é contínua. Seja $(x_0,y_0)\in D_2$. Tem-se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D_1}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x_0^2+y_0^2} = \sqrt{2x_0^2} = 2|x_0|$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D_2\cup D_3}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x+y = x_0+y_0=0$$

Conclui-se assim que o único ponto de D_2 onde f é contínua é $(0,0)$. O domínio de continuidade, D_c, é portanto

$$D_c = D_1\cup D_3\cup\{(0,0)\}.$$

b) É fácil provar que $f\in C^1$ em $D_1\cup D_3$. Logo f é diferenciável em $D_1\cup D_3$. Analisemos a diferenciabilidade de f em $(0,0)$. Ora

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{h} = \begin{cases} 1, & h>0\\ 1, & h<0\end{cases}$$

e também

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)}{k} = \begin{cases} 1, & k>0\\ 1, & k<0\end{cases}$$

$(0,0)$, i.e. $[1\ \ 1]$ é a derivada de f em $(0,0)$, i.e.

Verifiquemos se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-[1,1]\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} \overset{?}{=} 0$$

Ora pode estabelecer-se que este limite não existe em $(0,0)$, e portanto f não é diferenciável em $(0,0)$.

c)

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t,1+t)-f(1,1)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}\,|1+t|-\sqrt{2}}{t} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,-1) = \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t,-1+t)-f(1,-1)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t,-1+t)}{t}$$

Como $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{f(1+t,-1+t)}{t}$ não existe então $\frac{\partial f}{\partial v}(1,-1)$ não existe