d) É fácil estabelecer que $\lim_{n\to\infty} P_n = (0,0)$. Como f é contínua em $(0,0)$ então

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} P_n\right)$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(0,0) = 0$$

2) a) A direcção de maior variação de f em P_0 é $\frac{Df(P_0)}{\|Df(P_0)\|}$ pois. sendo f diferenciável tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = Df(P_0).v = \|Df(P_0)\| \underbrace{\|v\|}_{=1} \cos\theta = \|Df(P_0)\|\cos\theta.$$

logo para $\cos\theta = \pm 1$ a variação é máxima.

Sejam

$$\begin{cases} u = t \\ v = v(t) \end{cases}, \quad t.q\ f(t, v(t)) = K$$

as equações paramétricas da curva de nível que passa por (u_0, v_0). As equações da tangente, τ, a esta curva em (u_0,v_0) são $(1, v'(t))$. Calculando a derivada de $f(t, v(t)) = K$ tem-se $\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} v'(t) = 0$ o que implica que $Df(P_0) \perp \tau$.

b) A equação do plano é

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x}\ \frac{\partial g}{\partial y}\ \frac{\partial g}{\partial z}\right]_{(1,0,1)} \begin{bmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x}\ \frac{\partial g}{\partial y}\ \frac{\partial g}{\partial z}\right]_{(1,0,1)} = \begin{bmatrix} e^{u^2-v} \cdot 2u & -e^{u^2-v} \end{bmatrix}_{(2,4)} \begin{bmatrix} \varphi'(x^2+y^2).2x & \varphi'(x^2+y^2).2y & 0 \\ 2\varphi(xz)\varphi'(xz)z & 0 & 2\varphi\varphi' x \end{bmatrix}_{(1,0,1)}$$