4) a) As funções $F(x,y,u,v) = x^2 - v^2 + u^2 \operatorname{sen} x + 4y^2$ e $G(x,y,u,v) = u^2 + y^2 + x - 1$ são de classe C^1 e satisfazem $F(0,-1,0,2) = 0$ e $G(0,-1,0,2) = 0$

Como
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}_{(0,-1,0,2)} \neq 0$$

podemos concluir, utilizando o Teorema da função implícita, que o sistema dado define y e v como funções de x e u numa viz de $(0,-1,0,2)$

b) Seja então $y = g_1(x,u)$. Calculemos $\frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial y}{\partial u}$.

Tem-se em $(0,-1,0,2)$
$$\begin{cases} F_x + F_y \frac{\partial y}{\partial x} + F_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ G_x + G_y \frac{\partial y}{\partial x} + G_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

i.e
$$\begin{bmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_x \\ G_x \end{bmatrix}$$

e entanto
$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,0) \neq 0,$$
o que permite concluir que $(0,0)$ não é extremante.

5) a) Se f é diferenciável então $\exists\, Df(P_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear t.q
$$\frac{|f(P) - f(P_0) - Df(P_0)(P-P_0)|}{\|P-P_0\|} \xrightarrow[P \to P_0]{} 0$$

e entanto