DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA-FCTUC
Análise Infinitesimal III (Exame de recurso)
25/1/2011

1) Considere a função $f : R^2 \to R$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} se \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$a)$Estude a continuidade de f em $(0,0)$.

$b)$Estude a existência de derivada direccional de f em $(0,0)$ segundo qualquer direcção v.

$c)$Analise a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

$d)$ Calcule, caso exista, o $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)$ em que $(P_n)_{n\in N}$ é a sucessão de R^2 definida por

$$P_n = (nsen\frac{1}{n} - n^2\cos^2(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}), \frac{1}{n}\cos^3\frac{1}{n}).$$

2) Considere a função $f : R^3 \to R^2$,de classe C^1, tal que

$$Df(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $F(r,\theta,\varphi) = f(r\cos\theta sen\varphi, rsen\theta sen\varphi, r\cos\varphi)$.Justifique que F é diferenciável e calcule $\frac{\partial F}{\partial v}(1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ com $v = (h_1 + h_2, h_1 + h_3, h_2 + h_3)$.

3) Sejam $(a,b,c) \in R^2 \setminus (0)$.Verifique se as superfícies de equações $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ e $x^2 + y^2 + (z - \frac{b^2+c^2}{c})^2 = \frac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$ admitem o mesmo plano tangente em $(0, \pm b, c)$.

4) Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange determine a equação da elipse de semi-eixos a, b , centrada na origem, que passa pelo ponto $(4,1)$ e que tem área minima. (A área da elipse é definida por πab.)

5) a) Sejam $\varphi,\ \psi\ :\ A \subset R \to R$, com A aberto. Seja ainda (a,b,c) uma solução do sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + y + \varphi(z) = 0 \\ x - y + \psi(z) = 0. \end{cases}$$

Estabeleça condições que garantam a existência de funções diferenciáveis f e g definidas numa vizinhança de a, tais que $(x, f(x), g(x))$ seja uma solução do sistema nessa vizinhança. Calcule $\frac{df}{dx}(a)$ em função das derivadas de φ e ψ.

b) Seja $F : D \subset R^3 \to R$ uma função diferenciável tal que $F(x,y,z) = 0$ define implicitamente cada uma das variáveis como função das duas restantes , $z = f(x,y), y = g(x,z), x = h(y,z)$.Se as derivada parciais de F não se anularem prove que

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} = -1.$$