DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA-FCTUC
Análise Infinitesimal III
4/1/2011-Duração 2h

1) Considere a função $f : R^2 \to R$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, se\ x+y>0 \\ x+y, se\ x+y \leq 0 \end{cases}$$

a)Estude a continuidade de f em R^2.

b)Estude a diferenciabilidade de f em R^2.

c)Analise a existência das derivadas direccionais $\frac{\partial f}{\partial v}(1,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(1,-1)$ na direcção $v=(1,1)$ e calcule-as caso existam.

d) Calcule, caso exista, o $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)$ em que $(P_n)_{n\in N}$ é a sucessão de R^2 definida por

$$P_n = (nsen\frac{1}{n} - 1, \frac{1}{n}sen\frac{1}{n}).$$

2) Considere a função $\varphi : R \to R$,de classe C^1, com $\varphi(1) = \frac{d\varphi}{dx}(1) = 2$.Defina as funções $f : R^2 \to R$ e $g : R^3 \to R$ por

$$\begin{cases} f(u,v) = e^{u^2-v} \\ g(x,y,z) = f(\varphi(x^2+y^2), \varphi^2(xz)). \end{cases}$$

a) Indique qual a direcção de maior variação de f no ponto $P_0 = (u_0, v_0)$, justificando a sua resposta. Verifique que essa direcção é ortogonal à curva de nível de f que passa por P_0.

b) Deduza a equação do plano tangente em $(1,0,1)$ à superfície definida por $g(x,y,z) = 1$.

3) Calcule os extremos da função

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 1,$$

no conjunto

$$D = \left\{(x,y); x^4 + y^4 \leq 1\right\}.$$

4) a) Prove que o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 - v^2 + u^2 senx + 4y^2 = 0 \\ u^2 + y^2 + x - 1 = 0, \end{cases}$$

define y e v como funções de x e u numa vizinhança de $(0,-1,0,2)$.

b) Seja (g_1, g_2) a função vectorial de variável vectorial definida na alínea anterior.Verifique se (0,0) é um extremante local de g_1.

5) Seja $f : D \subset R^n \to R$ uma função diferenciável em P_0,com $P_0 \in int(D)$.

a) Prove que f é linearizável nas vizinhanças de P_0 e deduza a equação da função f linearizada.

b) Mostre que se f atinge um extremo em P_0 então $Df(P_0) = 0$.