Análise Infinitesimal III
1^a Frequência-19/10/2010

Duração 1h45

1) Esboce algumas curvas de nível e os gráficos das funções

a) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ b) $g(x,y) = \begin{cases} \ln\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 \geq 1 \\ 1-x^2-y^2, x^2+y^2 < 1 \end{cases}$

.2) Indique o valor lógico das afirmações seguintes, justificando a sua resposta:

a) Seja A_i, $i \in N$, um conjunto aberto. Então $\bigcap_{i\in N} fr(A_i)$ - em que $fr(A_i)$ representa a fronteira de A_i- é um conjunto fechado.

b) A sucessão (P_n)=$((1+\frac{1}{n})^n, \frac{sen^2 n}{n^2}, \frac{\ln n}{n})$ é limitada mas não é convergente.

3) a) Seja $f : D \subset R^2 \to R$, definida por

$$f(x,y) = \frac{(x-\alpha)(y-\beta)}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

em que $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$.Analise a existência de limite da função em (α,β).

b) Estude o

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{(x-\alpha)^3-(y-\beta)^3}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2(1+sen^2(x+k))}$$

em que $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ e $k \in R$.

.4) Considere a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} sen^2(y-x), y > x \\ 0, y = x \\ \frac{y^2}{\sqrt{y^2+x^2}}, y < x. \end{cases}$$

a) Indique qual o domínio de continuidade de f.

b) Considere a sucessão

$$(\frac{(-1)^n}{\ln n}, \frac{n^2}{e^n}).$$

Indique o seu limite e calcule $\underset{n\to\infty}{lim} f(Pn)$.Justifique a sua resposta.

5) Prove,utilizando a definição, que $\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} f(x,y) = 0$,em que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^4}{x^4+y^2} sen\frac{1}{x} sen\frac{1}{y}, x \neq 0, y \neq 0 \\ 0, x = 0 \vee y = 0. \end{cases}$$

6) Sejam $f : R^n \to R^m$ uma função contínua e

$$A = \left\{(x^1,x^2,...x^n); f((x^1,x^2,...x^n) = a \vee f((x^1,x^2,...x^n) = b\right\}$$

com $a \neq b, a, b \in R^m$.Prove que A é fechado em R^n.