Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Exame, 5/1/2001

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. <u>Seja conciso.</u>

1. Seja

$3\times 4 \qquad 3\times 3 \qquad 3\times 4$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 \\ -1 & \beta & 1 & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determine uma factorização LU de A, sendo L uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U uma matriz em escada.

   (b) Discuta, em função dos parâmetros α e β,

      i. A característica de A;

      ii. O sistema $Ax = b$.

   (c) Determine a solução geral do sistema $Ax = b$, para $\alpha = 0$ e $\beta = -1$.

   (d) <u>Usando a alínea anterior</u>, determine a terceira coluna da inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Para cada uma das afirmações seguintes, diga se é verdadeira ou falsa, <u>justificando</u> a escolha feita.

   (a) Sejam A e B matrizes $n \times n$. Se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$. falso $\underbrace{A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}_{\text{por exemplo}}$ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) Seja A uma matriz $n \times n$. Se as linhas de A forem linearmente dependentes, então $\det(A) = 0$. falso

   (c) Seja A uma matriz simétrica. Então a matriz $I + 2A + A^2$ é também simétrica.

   (d) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ for um subconjunto linearmente independente de um espaço vectorial V, então $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ é também linearmente independente.

3. Considere os seguintes subespaços de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ c+d & d \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (a) Verifique que, de facto, W é um subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (b) Determine uma base de W. $c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   (c) Verifique que $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U + W$. Ter-se-á $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus W$? $U \cap W = \{0\}$

4. Para cada uma das alíneas seguintes, apresente uma matriz A, com no máximo duas colunas, para a qual o número de soluções do sistema $Ax = b$ seja:

   (a) 0 ou 1, dependendo de b;

   (b) Infinito, independentemente de b;

   (c) 0 ou infinito, dependendo de b.

   (Não se esqueça de justificar as suas respostas.)

5. Seja V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n, x, y$ vectores de V. Sejam $U_1 = \mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $U_2 = \mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n, x\}$ e $U_3 = \mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n, y\}$.

   (a) Mostre que se $y \notin U_1$, mas $y \in U_2$, então $x \in U_3$.

   (b) Prove que se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ for linearmente independente, então qualquer vector de U_1 se escreve de modo único como combinação linear dos vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.