Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

# Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Exame, 5/2/2001

**Importante:** Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. <u>Seja conciso</u>.

1. Seja $A = LU$, onde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determine $L^{-1}$. $L^{-1} = E_{31}(-1/2)E_{21}(3) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad l_2' = l_2 + Q l_1$

   (b) Sem calcular $A$, diga que múltiplo da primeira linha de $A$ foi adicionado à segunda para obter a segunda linha de $U$. $-3$ $\qquad A = E_{31}(1/2)E_{21}(3)U$

   (c) Discuta, em função dos parâmetros $\alpha$ e $\beta$,

      i. a característica de $A$;

      ii. o sistema $Ax = [2\ 0\ \beta]^T$. linear/ dep. $c_1(L)$ $c_3(L)$

   (d) Faça $\alpha = \beta = 2$. Sabendo que $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1/2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, resolva o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ mediante a resolução de <u>apenas um</u> sistema de equações lineares com uma matriz triangular superior.

2. Para cada uma das afirmações seguintes, diga se é verdadeira ou falsa, <u>justificando</u> a escolha feita.

   (a) Seja $A = S\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}S^{-1}$, onde $S$ é uma matriz invertível de ordem dois. Então $A^{2002} = I_2$.

   (b) Sejam $A$ e $B$ matrizes $3 \times 3$ invertíveis. Se $det(A) = 2$ então $det(2BA^{-1}B^{-1}) = 1$.

   (c) Se $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_k\}$ é um conjunto linearmente dependente, então $v_1$ é combinação linear dos restantes $k-1$ vectores do conjunto.

   (d) Se $A$ $n \times n$ é uma matriz simétrica invertível, então a sua inversa coincide com a sua transposta.

3. Dado $k \in \mathbb{R}$, considere os seguintes subespaços do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$:

$$A_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = kz \text{ e } y = z\} \text{ e } B = \{(a+b, a+2b+c, a-c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

   (a) Verifique que, de facto, $A_k$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Determine uma base para cada um dos subespaços vectoriais $A_k$ e $B$.

   (c) Diga para que valores do parâmetro real $k$ o conjunto $A_k \cup B$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   (d) Averigúe se $A_2 \oplus B = \mathbb{R}^3$.

4. Seja $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base do espaço vectorial real $V$.

   (a) Calcule uma base de $V$ que contenha o vector $v = v_1 - v_2 + v_3$.

   (b) Dados os vectores $u_1 = v_1 - v_2$ e $u_2 = v_2 + v_3$, determine um terceiro vector $u_3$ de tal modo que $\{u_1, u_2, u_3\}$ seja uma base de $V$ e $v$ tenha coordenadas $(1, 1, 1)$ nesta base.

   (Não se esqueça de justificar as suas respostas.)

5. Sejam $A$ e $B$ matrizes $n \times n$.

   (a) Mostre que se o produto $AB$ é invertível, então $A$ e $B$ são ambas invertíveis.

   (b) Prove que se $AB = I_n$, então $B = A^{-1}$.