Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

(Licenciaturas em Matemática e Engenharia Geográfica)

Exame, 21/1/2002

2h30.

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 1 & \alpha+1 & -\alpha \\ -1 & \alpha & 1 & \alpha \end{bmatrix}_{3\times 4}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Factorize A na forma LU, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada.

(b) Determine todos os valores de α para os quais $\text{nul}(A) = 1$.

(c) Faça $\alpha = 0$.

i. Determine o espaço nulo de A. $N(A) =$

ii. Determine a solução geral do sistema $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

22222

2. Para cada uma das afirmações seguintes, diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.

F (a) Seja A $m \times n$. Se $\text{car}(A) = n$ então o sistema $Ax = b$ é possível determinado para todo o b $m \times 1$.

F (b) Se $v_1, \ldots, v_k$ geram $\mathbb{R}^{2002}$, então $k < 2002$. F Se $v_1, \ldots, v_k$ geram $\mathbb{R}^{2002}$ podem existir até 2 vectores, e neste caso seria o próprio $\mathbb{R}^{2002}$ pois os vectores seriam todos linear independ.

(c) Sendo A $m \times n$ e B $p \times m$, o espaço das colunas de BA está contido no espaço das colunas de B.

V (d) Se os vectores $v_1, \ldots, v_k$ de $\mathbb{R}^n$ são linearmente independentes e a matriz $n \times n$ A é não-singular, então os vectores $Av_1, \ldots, Av_k$ também são linearmente independentes. $\text{car}(A) = n$

$Bx = c$ $C(A)$ $BAx = c$

$\boxed{BAx = Ac}$ BA

3. (a) Sejam A e B matrizes 5×5. Se $\det(A) = 4$ e $\det(B) = 3$, indique o valor de $\det(2A^{-1}B)$.

(b) Sem calcular os determinantes indicados, mostre que

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$\det(2A^{-1}B) = \det(2A^{-1})\det(B)$
$= \cancel{\det}(2^5 \cdot \frac{1}{\det(A)} \cdot \det$
$= 2^5 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3$
$= 2^5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{32 \cdot 3}{4}$
$= 24$

4. Seja $F = \{(a + 4b - 3c,\ 2a + 5b,\ 3a + 6b + 3c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

(a) Prove que F é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine uma base e indique a dimensão de F.

5. Seja A uma matriz $m \times n$ e seja b uma coluna $m \times 1$. Designemos por A' a matriz $m \times (n+1)$ que se obtém juntando a A a coluna b. Sem usar o algoritmo de eliminação de Gauss, prove que o sistema $Ax = b$ é possível se e só se $\text{car}(A) = \text{car}(A')$.