Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

(Licenciaturas em Matemática e Engenharia Geográfica)

Exame, 11/2/2002

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2-\alpha & 2 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Factorize A na forma LU, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada.

   1/2 (b) Diga para que valores de α a matriz A é invertível.

   (c) Faça $\alpha = 3$.

   X i. Resolva o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   x ii. Usando o resultado da alínea (i), indique a terceira coluna de A^{-1}.

   Resolver o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é encontrar $\underline{x}$ tal que, a coluna que multipl por A dá a 3ª coluna de A^{-1} porque a 3ª coluna de $I_{3\times 3}$ é $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Para cada uma das afirmações seguintes, diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.

   V (a) Sendo A e B matrizes simétricas, se $AB = BA$ então AB é simétrica.

   F (b) Sendo A quadrada, se $\det(A) = 0$ então as colunas de A são linearmente independentes.

   V (c) Se A for uma matriz $m \times n$ tal que, para qualquer $b \in \mathbb{R}^m$, o sistema $Ax = b$ é possível, então o sistema $A^T y = 0$ só tem a solução nula.

   F (d) Sejam $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^n$. Se v_1 e v_2 são linearmente independentes e v_3 e v_4 também são linearmente independentes, e se nem v_3 nem v_4 pertencem a $\mathcal{L}\{v_1, v_2\}$, então v_1, v_2, v_3, v_4 são linearmente independentes.

   $V_1 = (1,0,0,0)$ $V_2 = (0,1,0,0)$ $V_3 = (1,0,1,0)$ $V_4 = (1,0,0,1)$

   $F = \mathcal{L}(0,0,1)$

3. (a) Sem calcular os determinantes indicados, mostre que

$$\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ a^2+x^2 & a^2+y^2 & a^2+z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & y & z \\ ax^2 & y^2 & z^2 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

   (b) Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Prove que, se $\det(A) = 0$, então $a = b = c = d = 0$.

   (Sugestão: Calcule AA^T.)

4. Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido por $F = \{(x, y, z) : x - 2y = 0\}$.

   (a) Determine uma base e indique a dimensão de F.

   x (b) Construa uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha a base determinada na alínea anterior.

5. Sejam F e G subespaços de $\mathbb{R}^n$. Se $F \subseteq G$ e $\dim(F) = \dim(G)$, prove que $F = G$.

Álgebra Linear e Geometria Analítica I
Resumo da resolução do exame de 11/2/2002

1. (a) Se $\alpha \neq 0$, tem-se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+2 \end{bmatrix}$.

   Se $\alpha = 0$, tem-se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (b) A é invertível para $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -2$.

   (c) i. A solução (única) é $\begin{bmatrix} -2/15 \\ 2/15 \\ 1/5 \end{bmatrix}$.

   ii. Como $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é a terceira coluna de I_3, a terceira coluna de A^{-1} é precisamente a solução do sistema indicado na alínea (i).

2. (a) A afirmação é verdadeira. Demonstração: $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$. (Usou-se o facto de que A e B são simétricas, isto é, de que $A^T = A$ e $B^T = B$.)

   (b) A afirmação é falsa. Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (c) A afirmação é verdadeira. Demonstração: Se, para qualquer $b \in \mathbb{R}^m$, o sistema $Ax = b$ é possível, tem-se necessariamente $\mathrm{car}(A) = m$. Então também $\mathrm{car}(A^T) = m$, o que significa que a matriz A^T tem tantos pivots como colunas. Segue-se que o sistema homogéneo $A^T y = 0$ é determinado.

   (d) A afirmação é falsa. Exemplo: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. (a) Usando as propriedades dos determinantes obtemos

$$\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ a^2+x^2 & a^2+y^2 & a^2+z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ a^2 & a^2 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & y & z \\ ax^2 & y^2 & z^2 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(b) Tem-se

$$AA^T = \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix},$$

donde $\det(AA^T) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$. Como $\det(AA^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = [\det(A)]^2$, e $\det(A) = 0$ por hipótese, tem-se $a^2+b^2+c^2+d^2 = 0$, donde $a = b = c = d = 0$.

4. (a) Seja (x, y, z) um vector qualquer de F. Tem-se

$$(x, y, z) = (2y, y, z) = y.(2, 1, 0) + z.(0, 0, 1),$$

pelo que os vectores $(2, 1, 0), (0, 0, 1)$ geram F. Estes dois vectores são linearmente independentes, e assim constituem uma base de F, que tem portanto dimensão 2.

(b) Basta acrescentar aos vectores $(2, 1, 0), (0, 0, 1)$ um terceiro vector que não seja combinação linear deles. Por exemplo, $(1, 0, 0)$. Os três vectores $(2, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)$ constituem uma base de $\mathbb{R}^3$.

5. Seja $\{v_1, \ldots, v_k\}$ uma base de F. Suponhamos que $F \neq G$. Então existe pelo menos um vector $w \in G$ não pertencente a F. Como w não pertence a F, não é combinação linear de $v_1, \ldots, v_k$. Então os $k+1$ vectores $v_1, \ldots, v_k, w$ são linearmente independentes, e a dimensão de G é pelo menos $k+1$, absurdo.

Cotação:

1. (*a*) 1,5	2. (*a*) 1,5	3. (*a*) 1,5	4. (*a*) 2,5	5. 2,5
(*b*) 1	(*b*) 1	(*b*) 2	(*b*) 1,5	
(*c*) i. 1	(*c*) 1,5			
ii. 1	(*d*) 1,5			