Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Exame, 24/6/2003

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Seja A a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

   3×3

   (a) Escreva A na forma LU, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada.

   (b) Indique a característica de A e uma base para o espaço nulo de A.

   (c) Diga para que vectores coluna $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ o sistema $Ax = b$ é possível e para esses vectores determine a solução geral do sistema.

2. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \beta \\ 1 & \beta & 4 \\ 1 & \beta & \beta \end{bmatrix}$, com $\beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine β de modo que a matriz A seja não-singular.

   ? (b) Faça $\beta = 6$ e calcule A^{-1}, usando a matriz adjunta. $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{adjT}}$

   (c) Usando a alínea anterior, justifique que, para $\beta = 6$, o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é possível determinado e indique a sua solução.

3. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x_2, x_1 + x_2, -x_1 + x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Prove que F é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Indique uma base de F que contenha o vector $(1, 2, 0)$. ?

   (c) Indique o elemento de F mais próximo do vector $(1, 2, 3)$.

   (d) Determine a recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(-1, 3)$. (Sugestão: usar a alínea anterior).

4. Considere em $\mathbb{R}^3$ os planos P_1, P_2 e P_3 definidos pelas equações $x + y + z = 1$, $x + 2y + z = 2$ e $2x + 3y + 2z = \alpha$, respectivamente, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine equações paramétricas de uma recta que seja paralela a P_1 e passe por $(1, 2, 3)$.

   (b) Calcule α de forma a que $P_1 \cap P_2 \cap P_3 \neq \emptyset$ e determine esta intersecção.

   (c) Determine a distância do ponto $(1, 2, 3)$ ao plano P_2.

5. Para cada uma das afirmações seguintes, diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.

   ? (a) Se uma matriz A comuta com as matrizes B e C, também comuta com o seu produto. F V

   (b) Sendo F e G subespaços de $\mathbb{R}^n$, se $\dim(F) \leq \dim(G)$ então $F \subseteq G$. F

   (c) Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ for uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ e v for um vector de $\mathbb{R}^n$, as coordenadas de v relativamente a essa base são $\langle v, v_1 \rangle$, $\langle v, v_2 \rangle$, ..., $\langle v, v_n \rangle$. V

   (d) O produto interno de dois vectores é um vector perpendicular a ambos. F