Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Exame, 16/7/2003

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine os valores de λ para os quais $Ax = [2 \quad \lambda \quad 1]^T$ é impossível.

   (b) Para $\lambda = 4$, determine a factorização LU de A.

   (c) Para $\lambda = -3$, resolva o sistema $Ax = 0$ e determine uma base para o espaço nulo de A.

2. Considere o seguinte sistema de equações $\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2\alpha x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = \beta \end{cases}$

   e seja A a matriz deste sistema.

   (a) Usando determinantes, indique que condições deve satisfazer α para que a matriz A seja invertível.

   (b) Determine os valores de α e β para os quais o sistema é possível.

   (c) Para $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, determine uma base de $C(A)$.

3. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$ $F = \{(x, y, z) : 2x - 5y + z = 0\}$.

   (a) Determine uma base ortogonal de F.

   (b) Sendo $b = (-1, 1, -3)$, calcule a projecção ortogonal de b sobre F.

   (c) Usando as alíneas anteriores, construa um sistema de três equações lineares com duas incógnitas, impossível, e que tenha $\overline{x} = (1, -\frac{2}{3})$ como única solução no sentido dos mínimos quadrados. Justifique.

4. Considere, em $\mathbb{R}^3$, as rectas R_1 e R_2 definidas, respectivamente, por $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ e $\begin{cases} x = \beta \\ y = 1 \\ z = 2 + \beta \end{cases}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que as rectas R_1 e R_2 se intersectam e determine a sua intersecção.

   (b) Determine o ângulo formado pelas rectas R_1 e R_2. $\theta = \arccos \dfrac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\|u_1\| \|u_2\|}$

   (c) Determine uma equação cartesiana do plano P que é paralelo às rectas R_1 e R_2 e passa pelo ponto $(2, 4, -7)$.

5. Para cada uma das afirmações seguintes, diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.

   F (a) Se uma matriz for invertível, então não tem zeros na diagonal principal.

   F (b) Se A for 7×7 e $C(A) = \mathbb{R}^7$, então $\det(A) \neq 0$.

   V (c) Se v_1, v_2, v_3 são vectores linearmente independentes então os vectores $v_1, v_2, v_1 + v_2 + v_3$ são também linearmente independentes.

   F (d) Sendo u e v vectores de $\mathbb{R}^n$, tem-se $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\|u\|^2\|v\|^2 + \|v\|^2$.