Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

21 de Junho de 2004 Duração: 2h 30m

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.
   (a) Factorize A na forma LU, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada.
   (b) Indique a característica de A e determine bases para o espaço das colunas de A e para o espaço das linhas de A.
   (c) Diga para que valores de α o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 3\alpha - 4 & -6 \end{bmatrix}^T$ é possível, e, para esses valores, mediante a resolução de dois sistemas triangulares determine a solução do sistema.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \beta \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule o determinante da matriz A.
   (b) Indique a condição (em α e β) para que $(\alpha, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, \beta)$ sejam linearmente independentes.
   (c) Para os valores de α e β para os quais A é invertível, determine o elemento (1,3) da inversa de A (Sugestão: Use a matriz adjunta de A).
   (d) Considere $\alpha = \beta = 1$. Resolva, no sentido dos mínimos quadrados o sistema $Ax = [1 \ \ 0 \ \ 2]^T$.

3. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^4$, $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_4 = 0\}$.
   (a) Mostre que S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Determine uma base de S e indique a dimensão de S.
   (c) Determine um conjunto de geradores do subespaço
   $$S \cap \mathcal{L}\{(0,0,0,1), (1,1,0,0), (0,0,1,1)\}.$$
   (d) Determine $S^{\perp}$.

4. (a) Determine a posição relativa das rectas $x = (1,1,0) + \alpha(1,2,2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x = (1,1,1) + \beta(2,4,4)$, $\beta \in \mathbb{R}$.
   (b) Mostre que existe um plano em $\mathbb{R}^3$ que contém as duas rectas e determine uma equação cartesiana desse plano.
   (c) Calcule a distância entre este plano e o plano que lhe é paralelo e contém o ponto $(1,2,3)$.

5. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.
   (a) Seja A uma matriz $m \times n$. Se $\text{car}(A) = n$, o sistema $Ax = b$ é possível para todo o $b_{m \times 1}$.
   (b) Existem subespaços de $\mathbb{R}^2$ gerados por três vectores.
   (c) Se uma matriz A é invertível e tanto A como A^{-1} têm todas as entradas inteiras, então $\det A = \pm 1$.
   (d) O plano em $\mathbb{R}^3$ de equação cartesiana $x + 2y - z = 0$ contém a recta de equação vectorial $(x, y, z) = (2, -1, 0) + \alpha(2, 4, -2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.