DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

13 de Julho de 2004 Duração: 2h 30m

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere a seguinte matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \end{bmatrix}$.

   (a) Factorize A na forma LDL^T, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e D é uma matriz diagonal.

   (b) Determine, em função do parâmetro μ, o núcleo e o espaço das colunas da matriz A. Indique bases para esses subespaços e as suas dimensões.

   ver (c) Para $\mu = 1$ e, mediante a resolução de dois sistemas triangulares, determine o conjunto solução de $Ax = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 9 & 2 \end{bmatrix}^T$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & \beta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Diga para que valores de α e β é que A é não-singular.

   (b) Considere $\alpha = \beta = 1$

      i. Calcule a inversa de A.

      ii. Indique a inversa da adjunta de A.

3. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$, $F = \mathcal{L}\{(1,0,-1,1),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$.

   (a) Mostre que o conjunto de vectores apresentados é linearmente independente.

   (b) Determine uma base ortonormada de F que contenha o vector $(0,0,0,1)$.

   (c) Determine o vector de F mais próximo do vector $(3,1,1,1)$.

   (d) Determine um subespaço S de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = F \oplus S$.

4. Em $\mathbb{R}^3$, considere o plano de equação $x + y + z = 0$.

   (a) Determine a e b de modo que a recta $(x,y,z) = (1,1,a) + \alpha(b,a,b)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ esteja contida nesse plano.

   (b) Escreva uma equação vectorial de um plano perpendicular ao plano dado e que não intersecte a recta $(x,y,z) = (1,1,0) + \alpha(1,0,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Determine a distância entre o plano definido e esta recta.

5. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Se A é uma matriz real 8×10 e a nulidade de A é 2, então o sistema $Ax = b$ é possível para qualquer $b \in \mathbb{R}^8$.

   (b) Em $\mathbb{R}^4$ existe um conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ linearmente independente.

   (c) Se a matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ é invertível, então $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ também é invertível.

   ver (d) Seja A uma matriz real. Se u e v são duas soluções no sentido dos mínimos quadrados do sistema impossível $Ax = b$, então $u - v \in N(A)$.